Problemas resueltos de

MATEMÁTICAS I COU

Tomo 1

Matrices y sistemas.
Espacio afín y euclídeo.

EDELVIVES

Autores:

Benigno Gil Marañón
Ángel de la Llave Canosa

Pruebas de acceso

Problemas resueltos de

MATEMÁTICAS I

COU. Opciones A y B

TOMO 1

Matrices y sistemas
Espacios afín y euclídeo

EDELVIVES

Coordinación editorial: **Abel Pedrosa**
Grabado de cubierta: **Escher**
Dibujos: **Miguel Ángel del Castillo Jiménez**

ISBN: **84-263-1913-0 (obra completa)**
ISBN: **84-263-1918-1 (tomo I)**
Depósito legal: **Z. 2633-90**
Impreso en España/ **Printed in Spain**
Talleres gráficos: **Edelvives**
50012 Zaragoza

PRESENTACIÓN

El objetivo primordial de **Problemas resueltos de Matemáticas I** coincide con las reflexiones básicas que se plasman en la modificación del Curso de Orientación Universitaria: *conseguir que el COU tenga realmente un carácter orientador, así como sentar las bases de una preparación adecuada del futuro estudiante universitario.*

Según las disposiciones generales (Orden ministerial del 3 de septiembre de 1987 y Resolución del 20 de enero de 1988), se han dispuesto *cuatro opciones:* A (Científico-tecnológica), B (Biosanitaria), C (Ciencias Sociales) y D (Humanístico-linguística). Claramente se establece que existirá *un sistema de prioridades para el ingreso de los alumnos en los diferentes centros universitarios,* según la opción que hubieran elegido previamente en el COU.

El libro que se presenta pretende cubrir la formación matemática, fundamentalmente práctica, de los alumnos que prefieran las opciones A y B y ayudarlos en la preparación de las **Pruebas de Acceso** a la Universidad.

Es una amplia y variada colección de problemas que recoge los **ejercicios resueltos** y ofrece la solución de los **ejercicios propuestos** en el libro **Matemáticas I** de COU, editado también por Edelvives.

Debido al gran número de ejercicios que presenta dicha colección, se edita en dos volúmenes separados. El primero recoge los ejercicios correspondientes a los bloques temáticos I (**matrices y sistemas**) y II (**espacios afín y euclídeo**). El segundo contiene los que corresponden a los bloques temáticos III (**cálculos diferencial e integral**) y IV (**cálculo de probabilidades**).

Es una obra pensada para ayudar a los alumnos en la comprensión de los contenidos básicos estudiados en la teoría, orientar su propio aprendizaje, capacitarlos para la aplicación práctica de los conceptos teóricos y proporcionarles las herramientas matemáticas indispensables en su futuro trabajo profesional.

Esta publicación puede ser también un valioso colaborador para los profesores, al evitarles la resolución numérica de los problemas propuestos y al complementar sus explicaciones de una manera apropiada y en el momento oportuno.

Los ejercicios se enumeran en orden creciente de dificultad y están resueltos detalladamente (en ocasiones hasta con una minuciosidad que podría parecer excesiva), utilizando un lenguaje claro y comprensible, pero no por eso desprovisto del rigor matemático adecuado. Con ello se pretende que los alumnos consigan una perfecta asimilación de los conceptos teóricos empleados y de las técnicas aplicadas en la resolución de los problemas.

Esperamos lograr nuestro objetivo de ayudar e interesar a los alumnos de COU en el estudio de las matemáticas, disciplina de una importancia capital. Con tan poco nos damos por satisfechos.

LOS AUTORES

PROGRAMACIÓN E ÍNDICE

I. Matrices y sistemas

II. Espacios afín y euclídeo

TEMA I-1.1. ——————— Matrices

Ejercicios resueltos

1. *Determinar dos matrices* A *y* B, *tales que*

$$3 \cdot A - 5 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } -A + 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Propuesto en la Univ. de Oviedo.)

Si se multiplica la segunda igualdad por 3, se obtiene:

$$3 \cdot (-A + 3 \cdot B) = -3 \cdot A + 9 \cdot B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sumando este resultado a la primera igualdad dada:

$$-3 \cdot A + 9 \cdot B + 3 \cdot A - 5 \cdot B = 4 \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+1 & 12-2 \\ 9+8 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 17 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{10}{4} \\ \frac{17}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{5}{2} \\ \frac{17}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo B en la segunda igualdad: $-A + 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{5}{2} \\ \frac{17}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$

$$A = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{5}{2} \\ \frac{17}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{4} - 2 & \frac{15}{2} - 4 \\ \frac{51}{4} - 3 & \frac{3}{4} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{39}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

2. *Para matrices cuadradas de orden 2, probar que* $k \cdot (A_2 + B_2) = k \cdot A_2 + k \cdot B_2$.

$$k \cdot \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right] \xrightarrow{\text{por (2)}} k \cdot \left[\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}\right] \xrightarrow{\text{por (3)}}$$

$$\to \begin{pmatrix} k \cdot (a_{11}+b_{11}) & k \cdot (a_{12}+b_{12}) \\ k \cdot (a_{21}+b_{21}) & k \cdot (a_{22}+b_{22}) \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{distributiva en R}]{\text{por la propiedad}}$$

$$\to \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} + k \cdot b_{11} & k \cdot a_{12} + k \cdot b_{12} \\ k \cdot a_{21} + k \cdot b_{21} & k \cdot a_{22} + k \cdot b_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{por (2)}}$$

$$\to \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \cdot b_{11} & k \cdot b_{12} \\ k \cdot b_{21} & k \cdot b_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{por (3)}}$$

$$\to k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Queda, pues, probado que $k \cdot (A_2 + B_2) = k \cdot A_2 + k \cdot B_2$.

3. *Hallar una matriz simétrica* S_n *y otra antisimétrica* T_n, *cuya suma sea la matriz cuadrada* A_n.

De acuerdo con el enunciado: $A_n = S_n + T_n$.

Haciendo la trasposición: $A'_n = (S_n + T_n)'$.

Por las propiedades de la trasposición de matrices: $(S_n + T_n)' = S'_n + T'_n$.

Por tanto: $A'_n = S'_n + T'_n$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Como } S_n \text{ es matriz simétrica: } S'_n = S_n \\ \text{como } T_n \text{ es matriz antisimétrica: } T'_n = -T_n\end{array}\right\} \to A'_n = S_n - T_n.$$

Es decir, se tiene el sistema $\begin{cases} A_n = S_n + T_n; \\ A'_n = S_n - T_n. \end{cases}$

Resuelto, se obtiene: $S_n = \dfrac{1}{2}(A_n + A'_n)$ y $T_n = \dfrac{1}{2}(A_n - A'_n)$.

4. *Hacer la aplicación del ejercicio anterior a la matriz* $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Su traspuesta es $A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, por consiguiente:

$$S_2 = \frac{1}{2}(A_2 + A'_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 \\ 3+2 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}, \text{ matriz simétrica ya que } \frac{5}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(A_2 - A'_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-1 & 2-3 \\ 3-2 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \text{ matriz antisimétrica, } \frac{1}{2} = -\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcular:

a) $A + B - C$; *b)* $A - B + C$; *c)* $A - B - C$;
d) $2A - 3B$; *e)* $3B - 5A$; *f)* $A - (B - 2C)$.

a) $A + B - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 2+3+3 \\ 3+1-0 & -2+2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

b) $A - B + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0-1 & 2-3-3 \\ 3-1+0 & -2-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

c) $A - B - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0+1 & 2-3+3 \\ 3-1-0 & -2-2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$.

d) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 & 4-9 \\ 6-3 & -4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$.

e) $3B - 5A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-5 & 9-10 \\ 3-15 & 6+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$.

f) $A - (B - 2C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

$$A - (B - 2C) = \begin{pmatrix} 1 - 0 - 2 & 2 - 3 - 6 \\ 3 - 1 + 0 & -2 - 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Determinar las matrices A y B sabiendo que

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}.$$

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Multiplicando la primera igualdad por -2, se obtiene:

$$-4A - 2B = \begin{pmatrix} -10 & -24 & -14 \\ -8 & -4 & -14 \end{pmatrix}.$$

Sumando este resultado a la segunda igualdad, se deduce:

$$-4A - 2B + 3A + 2B = -A = \begin{pmatrix} -10 & -24 & -14 \\ -8 & -4 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -14 \\ 12 & 6 & 21 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo A en la primera igualdad, se tiene:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} - 2A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 28 \\ -24 & -12 & -42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}.$$

3. Determinar las trazas de las matrices resultantes en los apartados *c)* y *f)* del ejercicio **1.**

La traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz; por tanto:

$$\text{tr. } (A - B - C) = 2 - 6 = -4; \qquad \text{tr. } [A - (B - 2C)] = -1 + 0 = -1.$$

4. Demostrar que $\text{tr. } (A_n + B_n) = \text{tr. } (A_n) + \text{tr. } (B_n)$.

De acuerdo con la definición de la adición de matrices, la traza de la matriz $(A_n + B_n)$ es:

$$\text{tr. } (A_n + B_n) = (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \dots + (a_{nn} + b_{nn}).$$

Por las propiedades conmutativa y asociativa de la adición en R, se puede escribir:

$$\text{tr. } (A_n + B_n) = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn}) = \text{tr. } (A_n) + \text{tr. } (B_n).$$

Queda, pues, demostrado que $\text{tr. } (A_n + B_n) = \text{tr. } (A_n) + \text{tr. } (B_n)$.

5. Probar que $\text{tr. } (k \cdot A_n) = k \cdot \text{tr. } (A_n)$.

De acuerdo con la definición de la multiplicación de un número (real) por una matriz, la traza de la matriz $(k \cdot A_n)$ es:

$$\text{tr. } (k \cdot A_n) = (k \cdot a_{11}) + (k \cdot a_{22}) + \dots + (k \cdot a_{nn}).$$

Por la propiedad distributiva en R, se puede escribir:

$$\text{tr. } (k \cdot A_n) = k \cdot (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = k \cdot \text{tr. } (A_n).$$

Queda, pues, demostrado que $\text{tr. } (k \cdot A_n) = k \cdot \text{tr. } (A_n)$.

6. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Se simboliza por A cuando sus elementos son números naturales y por B cuando son números reales. ¿Se puede afirmar, entonces, que A = B? Razonar la respuesta.

No, ya que las matrices sólo se pueden relacionar (en este caso igualar) si sus elementos son del mismo conjunto numérico.

Así, pues, $0 \in N$ de la matriz A es un número natural y $0 \in R$ de la matriz B es un número real. Como son elementos de distinto conjunto numérico no se pueden igualar.

7. Comprobar las propiedades que se indican para las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}:$$

a) La asociativa de la adición.

b) La de existencia de matriz neutra o matriz cero para la segunda matriz.

c) Para la tercera matriz y para los números reales $k = -2$ y $k' = 2$, que:

$$(k + k') \cdot A_3 = k \cdot A_3 + k' \cdot A_3.$$

a) La propiedad asociativa expresa que $(A + B) + C = A + (B + C)$.

- $$(A + B) + C = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 \\ 5 & 8 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 11 \\ 9 & 13 & 9 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

- $$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 13 & 5 \\ 8 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 11 \\ 9 & 13 & 9 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Las dos matrices resultantes tienen iguales los elementos correspondientes (los que ocupan el mismo lugar); por tanto, las dos matrices resultantes son iguales. Por consiguiente, queda comprobada la propiedad asociativa de la adición de matrices.

b) La propiedad de la matriz neutra 0_3 indica que $0_3 + B = B$.

Siendo B la segunda matriz propuesta, se tiene:

$$0_3 + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Nota: Igualmente se tiene: $B + 0_3 = B$.

Por tanto, queda comprobada la existencia de la matriz neutra de la segunda matriz.

c) Aplicando las definiciones de multiplicación de un número por una matriz y de adición de matrices, resulta:

- $$(-2 + 2) \cdot A_3 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3;$$

- $$-2 \cdot A_3 + 2 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} -10 & -10 & -10 \\ -8 & -10 & -6 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 8 & 10 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Se llega a la misma matriz en los dos miembros de la igualdad, con lo que queda comprobada la propiedad propuesta.

8. Demostrar para matrices de números reales de orden 2 las propiedades:

a) Conmutativa de la adición.

b) Existencia de matriz opuesta para cada matriz.

c) $k \cdot (A_2 + B_2) = k \cdot A_2 + k \cdot B_2$.

d) $k \cdot (k' \cdot A_2) = (k \cdot k') \cdot A_2$.

a) Propiedad conmutativa de la adición: $A_2 + B_2 = B_2 + A_2$.

• $A_2 + B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix};$

• $B_2 + A_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{pmatrix}.$

Las dos matrices resultantes son iguales, dado que lo son sus elementos correspondientes, en virtud de la propiedad conmutativa de la adición de números reales: $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ (para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$).

Queda, pues, demostrada la propiedad conmutativa de la adición de matrices de orden 2 de números reales.

b) Matriz opuesta: $A_2 + (-A_2) = 0_2$.

$$A_2 + (-A_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Queda, pues, demostrada la existencia de la matriz opuesta para cada matriz de orden 2 de números reales.

c) $k \cdot (A_2 + B_2) = k \cdot A_2 + k \cdot B_2$.

• $k \cdot (A_2 + B_2) = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a_{11} + b_{11}) & k(a_{12} + b_{12}) \\ k(a_{21} + b_{21}) & k(a_{22} + b_{22}) \end{pmatrix};$

• $k \cdot A_2 + k \cdot B_2 = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_{11} & kb_{12} \\ kb_{21} & kb_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} + kb_{11} & ka_{12} + kb_{12} \\ ka_{21} + kb_{21} & ka_{22} + kb_{22} \end{pmatrix}.$

Las dos matrices resultantes son iguales por la propiedad distributiva de la multiplicación de números reales respecto de la adición de números reales: $k(a_{ij} + b_{ij}) = ka_{ij} + kb_{ij}$ (para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$).

Queda, pues, demostrada la propiedad propuesta.

d) $k \cdot (k' \cdot A_2) = (k \cdot k') \cdot A_2$.

$$k \cdot (k' \cdot A_2) = k \cdot \begin{pmatrix} k'a_{11} & k'a_{12} \\ k'a_{21} & k'a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kk'a_{11} & kk'a_{12} \\ kk'a_{21} & kk'a_{22} \end{pmatrix};$$

$$k \cdot (k' \cdot A_2) = \begin{pmatrix} (kk')a_{11} & (kk')a_{12} \\ (kk')a_{21} & (kk')a_{22} \end{pmatrix} = (k \cdot k') \cdot A_2,$$

en virtud de la propiedad asociativa de la multiplicación de números reales.

Queda, pues, demostrada la propiedad propuesta.

9. Demostrar que en el conjunto de las matrices $M_{m,n}$ se cumple:

a) $0 \cdot A_{m,n} = 0_{m,n}$, $(0 \in R)$.

b) $1 \cdot A_{m,n} = A_{m,n}$.

Por la definición de multiplicación de un número (el cero y el uno en estos casos) por una matriz, resulta:

a) $0 \cdot A_{m,n} = 0 \cdot (a_{ij})_{m,n} = (0 \cdot a_{ij})_{m,n} = (0)_{m,n} = 0_{m,n}$.

b) $1 \cdot A_{m,n} = 1 \cdot (a_{ij})_{m,n} = (1 \cdot a_{ij})_{m,n} = (a_{ij})_{m,n} = A_{m,n}$.

Quedan, pues, demostradas las propiedades propuestas.

10. Si el conjunto de los elementos de las matrices cuadradas de orden 2 es el de los números naturales, ¿qué propiedades se cumplen para la adición?

Dado que el conjunto de los números naturales no admite opuestos, la adición de matrices (en este supuesto de orden o dimensión 2) cumple las propiedades asociativa, conmutativa y existencia de matriz cero, 0_2, pero no cumple la propiedad de existencia de matriz opuesta.

11. Sea el conjunto de matrices:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : \forall x \in Z, \forall y \in Z \right\}.$$

Se establecen en P la igualdad, como «igualdad de matrices», y la operación interna adición, como «adición de matrices». ¿Qué propiedades se cumplen?

Es operación interna, dado que para dos matrices cualesquiera de P se cumple:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 0+0 \\ 0+0 & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix}.$$

Y si $a \in Z$, $b \in Z$, $c \in Z$ y $d \in Z$ $\rightarrow$ $a + c \in Z$ y $b + d \in Z$.

Las propiedades que se cumplen son:

- Asociativa: $\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\right]$,

  ya que $(a + c) + e = a + (c + e)$, $(0 + 0) + 0 = 0 + (0 + 0)$ y $(b + d) + f = b + (d + f)$ por la propiedad asociativa de la adición en Z.

- Conmutativa: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$,

  porque $a + c = c + a$, $0 + 0 = 0 + 0$ y $b + d = d + b$ por la propiedad conmutativa de la adición en Z.

- Existencia de matriz neutra o cero: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P$,

  puesto que el elemento (1,1) de la matriz neutra es $0 \in Z$ y el elemento (2,2) de la matriz neutra es $0 \in Z$.

- Existencia de matriz opuesta: de la matriz $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ es opuesta la matriz $\begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & -y \end{pmatrix}$,

  ya que $x - x = 0 \in Z$ e $y - y = 0 \in Z$.

12. ¿Qué matrices triangulares son simétricas? ¿Y antisimétricas?

Una matriz cuadrada A_n cuyos elementos a_{ij} son nulos para $i > j$ se denomina matriz triangular superior; una matriz cuadrada A_n cuyos elementos a_{ij} son nulos para $i < j$ se llama matriz triangular inferior.

1) Para que una matriz triangular (superior o inferior) A_n sea simétrica ha de ser igual a su traspuesta A_n' $(A_n = A_n')$; es decir, sus elementos simétricos han de ser iguales $(a_{ij} = a_{ji}, \forall i \neq j)$.

   Como se trata de una matriz triangular (superior o inferior), se deduce que $a_{ij} = a_{ji} = 0, \forall i \neq j$; lo que indica que, para que una matriz triangular sea simétrica, ha de ser una matriz diagonal.

   Por tanto, son simétricas las matrices triangulares que sean matrices diagonales.

2) Para que una matriz triangular (superior o inferior) A_n sea antisimétrica ha de ser igual a la opuesta de su traspuesta $-A_n'$ $(A_n = -A_n')$; es decir, sus elementos simétricos han de ser opuestos $(a_{ij} = -a_{ji}, \forall i \neq j)$ y los elementos de la diagonal principal han de ser nulos $(a_{ij} = 0, \forall i = j)$.

   Como se trata de una matriz triangular (superior o inferior), se deduce que $a_{ij} = -a_{ji} = 0, \forall i$ y $\forall j$; lo que indica que, para que una matriz triangular sea antisimétrica, ha de ser una matriz nula.

   Por tanto, son antisimétricas las matrices triangulares que sean matrices nulas.

13. ¿Son simétricas las matrices unidad? Razonar la respuesta.

Las matrices unidad son simétricas porque son iguales a sus traspuestas.

14. Descomponer en suma de una matriz simétrica y una antisimétrica la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Según el resultado del ejercicio **3** de los ejercicios resueltos, la matriz simétrica es $S_3 = \frac{1}{2}(A_3 + A_3')$ y la matriz antisimétrica es $T_3 = \frac{1}{2}(A_3 - A_3')$.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};\ A_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix};\ A_3 + A_3' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix};\ A_3 - A_3' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$S_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix};$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Descomponer en suma de una matriz simétrica y una antisimétrica una matriz unidad de orden 3. ¿Qué ocurre?

La matriz unidad de orden 3 es $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aplicando el resultado del ejercicio 3 de los ejercicios resueltos, la matriz simétrica es $S_3 = \frac{1}{2}(I_3 + I_3')$ y la matriz antisimétrica es $T_3 = \frac{1}{2}(I_3 - I_3')$.

Como $I_3 = I_3'$, se deduce:

$$S_3 = \frac{1}{2}(I_3 + I_3) = \frac{1}{2} \cdot 2I_3 = I_3; \quad T_3 = \frac{1}{2}(I_3 - I_3) = \frac{1}{2}\, 0_3.$$

Por tanto, la matriz unidad de orden 3 se descompone en suma de ella misma (matriz simétrica) y de la matriz cero (matriz antisimétrica).

16. Probar las propiedades de la trasposición de matrices de orden 3 de números reales:

a) $(A_3')' = A_3$; *b)* $k \cdot A_3' = (k \cdot A_3)'$; *c)* $(A_3 + B_3)' = A_3' + B_3'$.

a) Aplicando la definición de matriz traspuesta, resulta:

$$(A_3')' = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}'\right]' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A_3.$$

Queda, pues, probada la propiedad propuesta.

b) Aplicando las definiciones de multiplicación de un número por una matriz y de matriz traspuesta, se obtiene:

$$\bullet\ k \cdot A_3' = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{21} & ka_{31} \\ ka_{12} & ka_{22} & ka_{32} \\ ka_{13} & ka_{23} & ka_{33} \end{pmatrix};$$

$$\bullet\ (k \cdot A_3)' = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{21} & ka_{31} \\ ka_{12} & ka_{22} & ka_{32} \\ ka_{13} & ka_{23} & ka_{33} \end{pmatrix}.$$

Como las dos matrices resultantes son iguales (porque tienen iguales los elementos correspondientes), queda probada la propiedad propuesta.

c) Aplicando las definiciones de adición de matrices y de matriz traspuesta, se deduce:

$$\bullet\ (A_3 + B_3)' = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & a_{31}+b_{31} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & a_{32}+b_{32} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix};$$

$$\bullet\ A_3' + B_3' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix};$$

$$A_3' + B_3' = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & a_{31}+b_{31} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & a_{32}+b_{32} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Como se llega a la misma matriz al desarrollar los dos miembros de la igualdad, queda probada la propiedad propuesta.

17. Probar que el conjunto de las matrices simétricas de orden (m,n) de números reales, para la adición y para la multiplicación por un número real, alcanzan la estructura de un espacio vectorial.

Como se trata de matrices simétricas son matrices cuadradas; es decir, $m = n$.

Se conoce que:

a) El conjunto M_n de las matrices cuadradas de números reales, de dimensión n, para la operación interna adición y la operación externa multiplicación por un escalar real, es un espacio vectorial.

b) El conjunto S_n de las matrices simétricas de números reales, de orden n, es un subconjunto del conjunto M_n de las matrices cuadradas de números reales, de dimensión n.

Por tanto, para probar que S_n, para dichas operaciones, es un espacio vectorial, basta demostrar que:

1) Para $A_n \in S_n$ y $B_n \in S_n$ que $A_n - B_n \in S_n$.

2) Para $A_n \in S_n$ y $k \in R$ que $k \cdot A_n \in S_n$.

En efecto:

1) Aplicando las definiciones de matriz opuesta y de adición de matrices, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{12}-b_{12} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}-b_{1n} & a_{2n}-b_{2n} & \dots & a_{nn}-b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Resulta efectivamente una matriz simétrica, pues tiene iguales los elementos simétricos respecto a la diagonal principal.

2) Aplicando la definición de multiplicación de un escalar por una matriz, se deduce:

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{12} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{1n} & ka_{2n} & \dots & ka_{nn} \end{pmatrix}.$$

Resulta en efecto una matriz simétrica, ya que tiene iguales los elementos simétricos respecto a la diagonal principal.

Queda, pues, probado que el conjunto de las matrices de orden n de números reales, para la operación interna adición y la operación externa multiplicación por una escala real, es un espacio vectorial.

18. Hallar la matriz M que satisface la igualdad:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + M.$$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + M.$$

Para que se pueda efectuar la adición las matrices han de ser conformes; es decir, del mismo orden. Por tanto, ord. (M) = (2,4).

Sumando a los dos miembros de la igualdad la matriz opuesta de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + M.$$

Por la propiedad asociativa de la adición de matrices y por la propiedad de la matriz opuesta, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right] + M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M.$$

Por la propiedad de la matriz nula, se deduce:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

TEMA I-1.2. ——— Multiplicación de matrices

Ejercicios resueltos

1. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *de coeficientes reales, hallar* x *e* y *para que se verifique* $A^2 = xA + yI$, *siendo* I *la matriz unidad de orden* 2.
(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix};$$

$$xA + yI = \begin{pmatrix} ax & bx \\ cx & dx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + y & bx \\ cx & dx + y \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente: $\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + y & bx \\ cx & dx + y \end{pmatrix}.$

De la igualdad de las dos matrices resulta el sistema:

$$\begin{cases} a^2 + bc = ax + y; \\ b(a + d) = bx; \\ c(a + d) = cx; \\ bc + d^2 = dx + y. \end{cases}$$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª forman el sistema: $\begin{cases} b(a + d) = bx; \\ c(a + d) = cx. \end{cases}$

- Si $b \neq 0$ y $c \neq 0 \rightarrow x = a + d$.
Para hallar y se sustituye x en la 1.ª ecuación:
$y = a^2 + bc - ax = a^2 + bc - a(a + d) = a^2 + bc - a^2 - ad = bc - ad.$
- Si $b = 0$ y $c = 0$, las ecuaciones 1.ª y 4.ª forman el sistema: $\begin{cases} a^2 = ax + y; \\ d^2 = dx + y. \end{cases}$
Para resolverlo se resta miembro a miembro las dos ecuaciones:
$a^2 - d^2 = ax - dx \rightarrow (a + d)(a - d) = x(a - d).$
—Si $a \neq d \rightarrow x = a + d.$
$y = a^2 - ax = a^2 - a(a + d) = a^2 - a^2 - ad = -ad.$
—Si $a = d \rightarrow \begin{cases} a^2 = ax + y \\ d^2 = dx + y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = ax + y; \\ a^2 = ax + y. \end{cases}$
El sistema tiene infinitas soluciones.

2. *Demostrar que son permutables las matrices simétricas*

$$A_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

Para que sean permutables (conmutativas) se debe cumplir: $A_2 \cdot B_2 = B_2 \cdot A_2$.

$$A_2 \cdot B_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu + yv & xv + yu \\ yu + xv & yv + xu \end{pmatrix} = \xrightarrow[\text{de la multiplicación en R}]{\text{por la propiedad conmutativa}}$$

$$\rightarrow = \begin{pmatrix} ux + vy & vx + uy \\ uy + vx & vy + ux \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = B_2 \cdot A_2.$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Comprobar para las matrices anteriores, A_2 y B_2, las propiedades de la multiplicación de matrices.

$$A_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \text{ y } C_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Nota: Los cálculos se simplifican para este tipo de matrices, según el resultado del ejercicio resuelto **2**; la matriz producto P también es tal que $p_{11} = p_{22}$ y $p_{12} = p_{21}$.

Aplicando las definiciones de multiplicación de matrices (en este caso cuadradas y simétricas de dimensión 2), de adición de matrices y de multiplicación de un número por una matriz, resultan las propiedades siguientes:

a) Asociativa: $A_2 \cdot (B_2 \cdot C_2) = (A_2 \cdot B_2) \cdot C_2$.

- Efectuando la multiplicación en el primer miembro, se obtiene:

$$P = A_2 \cdot (B_2 \cdot C_2) = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} up + vq & uq + vp \\ uq + vp & up + vq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{aligned} p_{11} = p_{22} &= x(up + vq) + y(uq + vp) = xup + xvq + yuq + yvp \\ p_{12} = p_{21} &= x(uq + vp) + y(up + vq) = xuq + xvp + yup + yvq \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

- Efectuando la multiplicación en el segundo miembro, se deduce:

$$P^* = (A_2 \cdot B_2) \cdot C_2 = \begin{pmatrix} xu + yv & xv + yu \\ xv + yu & xu + yv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{aligned} p_{11}^* = p_{22}^* &= (xu + yv)p + (xv + yu)q = xup + xvq + yuq + yvp \\ p_{12}^* = p_{21}^* &= (xu + yv)q + (xv + yu)p = xuq + xvp + yup + yvq \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Comparando (1) y (2), resulta:

$$p_{11} = p_{11}^*,\ p_{12} = p_{12}^*,\ p_{21} = p_{21}^*,\ p_{22} = p_{22}^* \rightarrow P = P^* \rightarrow A_2 \cdot (B_2 \cdot C_2) = (A_2 \cdot B_2) \cdot C_2.$$

b) Conmutativa: $A_2 \cdot B_2 = B_2 \cdot A_2$.

Se ha demostrado en el ejercicio resuelto **2** al probar que A_2 y B_2 son matrices permutables.

Nota: Recuérdese que, en general, la multiplicación de matrices no es conmutativa.

c) Existencia de matriz unidad I_2: $A_2 \cdot I_2 = A_2$; $I_2 \cdot A_2 = A_2$.

En efecto:

$$A_2 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 0 & 0 + y \\ y + 0 & 0 + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = A_2.$$

Igualmente $I_2 \cdot A_2 = A_2$, por la propiedad conmutativa.

d) Distributiva de la multiplicación respecto de la adición: $A_2 \cdot (B_2 + C_2) = A_2 \cdot B_2 + A_2 \cdot C_2$.

- Efectuando las operaciones en el primer miembro, se deduce:

$$A_2 \cdot (B_2 + C_2) = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u + p & v + q \\ v + q & u + p \end{pmatrix};$$

$$A_2 \cdot (B_2 + C_2) = \begin{pmatrix} x(u + p) + y(v + q) & x(v + q) + y(u + p) \\ x(v + q) + y(u + p) & x(u + p) + y(v + q) \end{pmatrix};$$

$$A_2 \cdot (B_2 + C_2) = \begin{pmatrix} xu + xp + yv + yq & xv + xq + yu + yp \\ xv + xq + yu + yp & xu + xp + yv + tq \end{pmatrix}.$$

• Efectuando las operaciones en el segundo miembro, se obtiene:

$$A_2 \cdot B_2 + A_2 \cdot C_2 = \begin{pmatrix} xu + yv & xv + yu \\ xv + yu & xu + yv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xp + yq & xq + yp \\ xq + yp & xp + yq \end{pmatrix};$$

$$A_2 \cdot B_2 + A_2 \cdot C_2 = \begin{pmatrix} xu + xp + yv + yq & xv + xq + yu + yp \\ xv + xq + yu + yp & xu + xp + yv + yq \end{pmatrix}.$$

Las dos matrices resultantes son iguales, con lo que queda probada la propiedad.

e) $(A_2 \cdot B_2)' = B_2' \cdot A_2'$.

Dado que A_2, B_2 y $A_2 \cdot B_2$ son matrices simétricas, se tiene:

$$A_2' = A_2,\ B_2' = B_2 \text{ y } (A_2 \cdot B_2)' = A_2 \cdot B_2.$$

• Sustituyendo en el primer miembro de la igualdad, se obtiene:

$(A_2 \cdot B_2)' = A_2 \cdot B_2 = A_2' \cdot B_2' = B_2' \cdot A_2'$, ya que A_2' y B_2' son matrices permutables.

• Sustituyendo en el segundo miembro de la igualdad, se deduce:

$B_2' \cdot A_2' = B_2 \cdot A_2 = A_2 \cdot B_2$ (porque A_2 y B_2 son matrices permutables) $= (A_2 \cdot B_2)'$.

Queda, pues, comprobada la propiedad.

f) $A_2 \cdot B_2 = 0_2$ no implica necesariamente que $A_2 = 0_2$ o $B_2 = 0_2$.

$$A_2 \cdot B_2 = 0_2 \rightarrow \begin{pmatrix} xu + yv & xv + yu \\ xv + yu & xu + yv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} xu + yv = 0 \\ xv + yu = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xu = -yv; \\ xv = -yu. \end{cases}$$

En el supuesto, admisible, de que $x = y$, $A_2 = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$, resultaría, para $x = y \neq 0$:

$\begin{cases} xu = -xv \\ xv = -xu \end{cases} \rightarrow u = -v$, que tiene soluciones no ceros (por ejemplo, $u = 1$, $v = -1$), tal y como se quería comprobar.

Así, para la matriz $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$ existe la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0_2$, tal que:

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x & -x + x \\ x - x & -x + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

2. Comprobar para las matrices $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ las igualdades siguientes:

a) $(A_2 + B_2)^2 = A_2^2 + 2A_2 \cdot B_2 + B_2^2$.

b) $(A_2 - B_2)^2 = A_2^2 - 2A_2 \cdot B_2 + B_2^2$.

c) $(A_2 + B_2) \cdot (A_2 - B_2) = A_2^2 - B_2^2$.

a) $A_2 + B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 & 2 - 1 \\ 3 + 1 & 0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};$

$$(A_2 + B_2)^2 = (A_2 + B_2) \cdot (A_2 + B_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 4 & 3 + 3 \\ 12 + 12 & 4 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 24 & 13 \end{pmatrix};$$

$$A_2^2 = A_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 6 & 2 + 0 \\ 3 + 0 & 6 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$A_2 \cdot B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2 & -1 + 6 \\ 6 + 0 & -3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix};$$

$$B_2^2 = B_2 \cdot B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 & -2-3 \\ 2+3 & -1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $A_2^2 + 2A_2 \cdot B_2 + B_2^2 =$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 7 \\ 20 & 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 24 & 13 \end{pmatrix} = (A_2 + B_2)^2.$$

Las dos matrices resultantes son distintas, lo que indica que la proposición *a)* es falsa, debido a que las matrices A_2 y B_2 no son permutables.

En efecto:

$$B_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 4-0 \\ 1+9 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = A_2 \cdot B_2.$$

Aplicando la propiedad distributiva, la proposición cierta es:

$$(A_2 + B_2)^2 = (A_2 + B_2) \cdot (A_2 + B_2) = A_2^2 + A_2 \cdot B_2 + B_2 \cdot A_2 + B_2^2.$$

Para las dos matrices dadas, A_2 y B_2, se tiene:

$$A_2^2 + A_2 \cdot B_2 + B_2 \cdot A_2 + B_2^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 24 & 13 \end{pmatrix} = (A_2 + B_2)^2.$$

b) $A_2 - B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+1 \\ 3-1 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$

$$(A_2 - B_2)^2 = (A_2 - B_2) \cdot (A_2 - B_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & -3-9 \\ -2-6 & 6+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ & 15 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $A_2^2 - 2A_2 \cdot B_2 + B_2^2 =$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -13 \\ -4 & 20 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -8 & 15 \end{pmatrix} = (A_2 - B_2)^2.$$

Las dos matrices resultantes son distintas, lo que indica que la proposición *b)* es falsa, por la misma razón que en el caso anterior.

Aplicando la propiedad distributiva, la proposición cierta es:

$$(A_2 - B_2)^2 = (A_2 - B_2) \cdot (A_2 - B_2) = A_2^2 - A_2 \cdot B_2 - B_2 \cdot A_2 + B_2^2.$$

Para las dos matrices A_2 y B_2, se tiene:

$$A_2^2 - A_2 \cdot B_2 - B_2 \cdot A_2 + B_2^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -8 & 15 \end{pmatrix} = (A_2 - B_2)^2.$$

c) $(A_2 + B_2) \cdot (A_2 - B_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 & 9-3 \\ -4+6 & 12-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$

$$A_2^2 - B_2^2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3 & 2+5 \\ 3-5 & 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $(A_2 + B_2) \cdot (A_2 - B_2) = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = A_2^2 - B_2^2.$

Las dos matrices resultantes son distintas, lo que prueba que la proposición *c)* es falsa, por la misma razón que en los dos casos anteriores.

Aplicando la propiedad distributiva, la proposición cierta es:

$$(A_2 + B_2) \cdot (A_2 - B_2) = A_2^2 - A_2 \cdot B_2 + B_2 \cdot A_2 - B_2^2.$$

Para las dos matrices dadas, A_2 y B_2, se tiene:

$$A_2^2 - A_2 \cdot B_2 + B_2 \cdot A_2 - B_2^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (A_2 + B_2) \cdot (A_2 - B_2).$$

3. ¿Son permutables las matrices anteriores A_2 y B_2?

Las dos matrices anteriores A_2 y B_2 no son permutables. (Ya se ha comprobado en el apartado *a)* del ejercicio anterior.)

4. ¿Son permutables las matrices $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$?

• $A_3 \cdot B_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -2-3+6 & -4-2+6 & -6-0+6 \\ 3+6-9 & 6+4-9 & 9+0-9 \\ 1+3-1 & 2+2-1 & 3+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

• $B_3 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -2+6+3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

No es necesario continuar con el cálculo de $B_3 \cdot A_3$, ya que $1 \neq 7$ y, por tanto, $A_3 \cdot B_3 \neq B_3 \cdot A_3$, con lo que se deduce que las matrices A_3 y B_3 no son permutables.

5. ¿Son permutables las matrices $A_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y $B_2 = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$ para todo valor real x, y, u, v?

• $A_2 \cdot B_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - yv & xv + yu \\ -yu - xv & -yv + xu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - yv & xv + yu \\ -(xv + yu) & xu - yv \end{pmatrix};$

• $B_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux - vy & uy + vx \\ -vx - uy & -vy + ux \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - yv & xv + yu \\ -(xv + yu) & xu - yv \end{pmatrix}.$

Como $A_2 \cdot B_2 = B_2 \cdot A_2$, las matrices A_2 y B_2 son permutables para todo valor real x, y, u, v.

6. ¿Son permutables las matrices I_n y 0_n?

Aplicando la propiedad de la matriz unidad $(A \cdot I = I \cdot A = A)$ a la matriz 0_n, resulta:

$0_n \cdot I_n = I_n \cdot 0_n = 0_n$, con lo que se comprueba que las matrices I_n y 0_n son permutables.

7. Comprobar que dos a dos son anticonmutativas las matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Las matrices dadas son: $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y $W = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

• $U \cdot V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+i & 0+0 \\ 0+0 & -i+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = W;$

$V \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-i & 0-0 \\ 0+0 & i+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -W.$

Como $U \cdot V = -V \cdot U$, las matrices U y V son anticonmutativas.

• $U \cdot W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 0-i \\ i+0 & 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = V;$

$W \cdot U = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & i+0 \\ 0-i & 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -V.$

Como $U \cdot W = -W \cdot U$, las matrices U y W son anticonmutativas.

• $V \cdot W = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 & 0+i^2 \\ i^2+0 & 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -U, \quad (i^2 = -1);$

$W \cdot V = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & -i^2+0 \\ 0-i^2 & -0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = U, \quad (-i^2 = 1).$

Como $V \cdot W = -W \cdot V$, las matrices V y W son anticonmutativas.

Nota: $U \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2;$

$V \cdot V = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-i^2 & 0-0 \\ 0+0 & -i^2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2;$

$W \cdot W = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^2+0 & 0-0 \\ 0-0 & 0+i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$

Por tanto, la tabla de la multiplicación de las matrices U, V y W es la que figura al margen.

En ella se observa la anticonmutatividad de las matrices U, V y W, consideradas dos a dos, ya que respecto a la diagonal principal la tabla es antisimétrica.

	U	V	W
U	I_2	W	V
V	−W	I_2	−U
W	−V	U	$-I_2$

8. Probar que, si A_n es matriz simétrica, $A_n \cdot A_n^t$ también es simétrica.

De acuerdo con la definición de multiplicación de matrices, para dos matrices cuadradas A_n y B_n (de la misma dimensión n), el elemento p_{ij} de la matriz producto $P_n = A_n \cdot B_n$, elemento que es el resultado de sumar los productos de los elementos de la fila i de la matriz A_n por los elementos correspondientes de la columna j de la matriz B_n, es igual a:

$$p_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

En este ejercicio, como $B_n = A_n^t$, el elemento p_{ij} de la matriz producto es:

$$p_{ij} = a_{i1} \cdot a_{j1} + a_{i2} \cdot a_{j2} + \dots + a_{in} \cdot a_{jn}.$$

Por otro lado, el elemento simétrico del elemento p_{ij}, respecto de la diagonal principal, de la matriz producto es el elemento p_{ji} que, de acuerdo con la definición de multiplicación de matrices, es:

$$p_{ji} = a_{j1} \cdot a_{i1} + a_{j2} \cdot a_{i2} + \dots + a_{jn} \cdot a_{in}.$$

Por la propiedad conmutativa de la multiplicación de números reales, se tiene:

$$p_{ij} = a_{i1} \cdot a_{j1} + a_{i2} \cdot a_{j2} + \dots + a_{in} \cdot a_{jn} = a_{j1} \cdot a_{i1} + a_{j2} \cdot a_{i2} + \dots + a_{jn} \cdot a_{in} = p_{ji}.$$

Como $p_{ij} = p_{ji}$, se deduce que los elementos simétricos de la matriz producto son iguales, lo que indica que la matriz producto $A_n \cdot A_n'$ (resultado de multiplicar una matriz por su matriz traspuesta), es matriz simétrica.

Nota: En el supuesto anterior no se ha tenido en cuenta que la matriz A_n sea simétrica, ya que, sea simétrica o no la matriz A_n, la matriz producto $A_n \cdot A_n'$ es simétrica.

También se podría demostrar que $A_n \cdot A_n'$ es simétrica comprobando que es igual a su traspuesta; es decir, que $A_n \cdot A_n' = (A_n \cdot A_n')'$.

Como la matriz traspuesta de una multiplicación se obtiene multiplicando en orden inverso las matrices traspuestas de los factores y al trasponer la traspuesta de una matriz se obtiene la matriz original, resulta:

$$(A_n \cdot A_n')' = (A_n')' \cdot A_n' = A_n \cdot A_n'.$$

9. Comprobar la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices con las matrices del ejercicio **7**.

La propiedad asociativa supone que $U \cdot (V \cdot W) = (U \cdot V) \cdot W$.

Utilizando la tabla de multiplicar estudiada en el ejercicio **7**, se tiene:

- $U \cdot (V \cdot W) = U \cdot (-U) = -U^2 = -I_2$;
- $(U \cdot V) \cdot W = W \cdot W = -I_2$.

Como se obtiene la misma matriz $-I_2$, queda comprobada la propiedad asociativa para las matrices U, V y W.

10. Probar que el producto de dos matrices triangulares (inferiormente) de orden 3 es otra matriz triangular.

Sean las matrices triangulares inferiores de orden 3: $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \\ u & v & w \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ bx + cy + 0 & 0 + cz + 0 & 0 + 0 + 0 \\ dx + ey + fu & 0 + ez + fv & 0 + 0 + fw \end{pmatrix}.$$

La matriz producto $A \cdot B = \begin{pmatrix} ax & 0 & 0 \\ bx + cy & cz & 0 \\ dx + ey + fu & ez + fv & fw \end{pmatrix}$ es matriz triangular inferior de orden 3.

11. ¿Por qué matriz hay que premultiplicar a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ para que resulte $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$?

Nota: Premultiplicar es multiplicar por la izquierda.

Por las condiciones de la multiplicación de matrices ($A_{m,n} \cdot B_{n,q} = P_{m,q}$), se tiene:

$$X_{m,n} \cdot A_{2,2} = P_{2,2} \rightarrow m = 2 \text{ y } n = 2.$$

Se trata, pues, de hallar una matriz cuadrada de orden 2: $X_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$.

$$X_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y & 0 + y \\ u + 2v & 0 + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y & y \\ u + 2v & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

De la definición de igualdad de matrices se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = 2 \\ u + 2v = 6 \\ v = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 4 = 5 \\ y = 2 \\ u + 6 = 6 \\ v = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ u = 0, \\ v = 3. \end{cases}$$

Por tanto, hay que premultiplicarla por la matriz $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

12. Calcular los productos de las siguientes matrices por subdivisiones en cajas:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Una posible subdivisión es:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 5 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{2,2} & A_{2,1} \\ \hline A_{1,2} & A_{1,1} \end{array}\right); \quad B = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B_{2,1} & B_{2,2} \\ \hline B_{1,1} & B_{1,2} \end{array}\right).$$

Multiplicando por cajas, se tiene:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{2,2} & A_{2,1} \\ A_{1,2} & A_{1,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{1,1} & B_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{2,2} \cdot B_{2,1} + A_{2,1} \cdot B_{1,1} & A_{2,2} \cdot B_{2,2} + A_{2,1} \cdot B_{1,2} \\ A_{1,2} \cdot B_{2,1} + A_{1,1} \cdot B_{1,1} & A_{1,2} \cdot B_{2,2} + A_{1,1} \cdot B_{1,2} \end{pmatrix};$$

$$A_{2,2}B_{2,1} + A_{2,1}B_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1) = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$A_{2,2}B_{2,2} + A_{2,1}B_{1,2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (3 \quad 5) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 27 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A_{1,2}B_{2,1} + A_{1,1}B_{1,1} = (5 \quad -2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (1) \cdot (1) = (4) + (1) = (5);$$

$$A_{1,2}B_{2,2} + A_{1,1}B_{1,2} = (5 \quad -2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (1) \cdot (3 \quad 5) = (26 \quad -2) + (3 \quad 5) = (29 \quad 3).$$

La matriz producto resulta ser:

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{c|cc} 13 & 25 & 27 \\ -3 & -2 & -1 \\ \hline 5 & 29 & 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 13 & 25 & 27 \\ -3 & -2 & -1 \\ 5 & 29 & 3 \end{pmatrix} = P_3.$$

b) Una subdivisión puede ser:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right); \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Multiplicando por cajas, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 14 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matriz producto es:

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 14 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = P_4.$$

c) Una subdivisión posible es:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -2 \\ \hline -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{array}\right); \quad B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ \hline 3 & -3 \end{array}\right).$$

Multiplicando por cajas, se tiene:

$$(2 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (-2) \cdot (3) = (-12); \quad (2 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2) \cdot (-3) = (12);$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot (3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot (-3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Su matriz producto es:

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{c|c} -12 & 12 \\ \hline 0 & 0 \\ -10 & 10 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -12 & 12 \\ 0 & 0 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} = P_{3,2}.$$

d) Una subdivisión puede ser:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right); \quad B = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline 2 \\ 1 \end{array}\right).$$

Multiplicando por cajas, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix};$$

La matriz producto es:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 15 \\ \frac{5}{7} \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = P_{4,1}.$$

13. Si P y Q son dos matrices cuadradas de orden n, ¿es cierta, en general, la igualdad

$$P^2 + 2PQ + Q^2 = (P + Q)^2?$$

(Propuesto en la Univ. de León.)

Es un enunciado similar al del apartado *a)* del ejercicio **2.**

Por la propiedad distributiva se puede escribir:

$$(P + Q)^2 = (P + Q) \cdot (P + Q) = P^2 + PQ + QP + Q^2.$$

La hipótesis propuesta es cierta cuando $PQ = QP$; es decir, cuando P y Q son matrices permutables.

14. Escribir como multiplicación de dos matrices la matriz $\begin{pmatrix} ax & by \\ cx & dy \end{pmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

$$\begin{pmatrix} ax & by \\ cx & dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

15. Formar la tabla de multiplicar del grupo constituido por los números 1, i, −1, −i (i es la unidad imaginaria). ¿Qué hay de común entre el grupo anterior y el constituido, para la multiplicación, por las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Recordando que $i^2 = -1$ y que $-i^2 = 1$, se construye la tabla de la multiplicación en

$$\mathscr{A} = \{1, i, -1, -i\}.$$

Es la tabla que aparece en el margen.

Se observa que la tabla es simétrica respecto de su diagonal principal.

$\mathscr{A}$	1	i	−1	−i
1	1	i	−1	−i
i	i	−1	−i	1
−1	−1	−i	1	i
−i	−i	1	i	−1

Por otra parte, las matrices dadas son:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por la definición de multiplicación de matrices, se tiene:

$$I^2 = I \cdot I = I; \quad I \cdot U = U \cdot I = U; \quad I \cdot V = V \cdot I = V; \quad I \cdot W = W \cdot I = W;$$

$$U \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = V;$$

$$U \cdot V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = W;$$

$$U \cdot W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I;$$

$$V \cdot U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = W;$$

$$V \cdot V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I;$$

$$V \cdot W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = U;$$

$$W \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I;$$

$$W \cdot V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = U;$$

$$W \cdot W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = V.$$

$\mathscr{B}$	I	U	V	W
I	I	U	V	W
U	U	V	W	I
V	V	W	I	U
W	W	I	U	V

Se construye la tabla de la multiplicación en

$$\mathscr{B} = \{I, U, V, W\}.$$

Es la tabla que aparece en el margen.

Se observa también que la tabla es simétrica respecto de su diagonal principal (lo mismo que la tabla de la multiplicación en $\mathscr{A}$).

Comparando las dos tablas anteriores se puede afirmar que existe cierta similitud de comportamiento de los números de $\mathscr{A}$ y de las matrices de $\mathscr{B}$, respecto de la multiplicación; se escribe:

$$1 \leftrightarrow I; \quad i \leftrightarrow U; \quad -1 \leftrightarrow V; \quad -i \leftrightarrow W.$$

Nota: Matemáticamente se dice que hay una **correspondencia biyectiva** entre $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ que conserva las operaciones definidas en $\mathscr{A}$ y en $\mathscr{B}$. Es decir, los grupos $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son **isomorfos.**

TEMA I-2.1. Determinante de una matriz

Ejercicios resueltos

1. *Determinar el signo correspondiente al término perteneciente al desarrollo de un determinante de orden 5:* $a_{25} \cdot a_{13} \cdot a_{51} \cdot a_{44} \cdot a_{32}$.

Por la propiedad conmutativa de la multiplicación de números:

$$a_{25} \cdot a_{13} \cdot a_{51} \cdot a_{44} \cdot a_{32} = a_{13} \cdot a_{25} \cdot a_{32} \cdot a_{44} \cdot a_{51},$$

con lo que se tiene el término con el orden natural para los subíndices de las filas. Ahora basta con determinar el índice de la permutación de los subíndices de las columnas (3, 5, 2, 4, 1).

Las inversiones de los pares de elementos de la permutación son:

$$\left.\begin{array}{l} 3{,}5 \text{ no; } 3{,}2 \text{ sí; } 3{,}4 \text{ no; } 3{,}1 \text{ sí; } 5{,}2 \text{ sí} \\ 5{,}4 \text{ sí; } 5{,}1 \text{ sí; } 2{,}4 \text{ no; } 2{,}1 \text{ sí; } 4{,}1 \text{ sí} \end{array}\right\} \rightarrow \epsilon = 7 \Rightarrow i = (-1)^7 = -1.$$

2. *Verificar que todas las matrices* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *tales que* $a + d = -1$ *y cuyo determinante es igual a 1, cumplen que* A^3 *es la matriz unidad. ¿Hay otra matriz que tenga esa propiedad?* *(Propuesto en la Univ. de Sevilla.)*

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a + d)b \\ (a + d)c & cb + d^2 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -1 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = a^2 + bc - ad + ad = a^2 + ad - (ad - bc) = a(a + d) - 1; \\ cb + d^2 = cb + d^2 - ad + ad = d^2 + ad - (ad - bc) = d(a + d) - 1. \end{cases}$$

Al ser $a + d = 1$, se tiene:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -a - 1 & -b \\ -c & -d - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a - 1 & -b - 0 \\ -c - 0 & -d - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A^2 = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -A - I_2.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (-A - I_2) \cdot A = -A^2 - AI_2.$$

Como $A^2 = -A - I_2$ y $AI_2 = A$ (por la propiedad de la matriz unidad), queda:

$A^3 = -A^2 - AI_2 = -(-A - I_2) - A = A + I_2 - A = I_2$, como se quería verificar.

Otra matriz que cumple la condición es la matriz unidad, I_2. En efecto:

$$I_2^3 = I_2 \cdot (I_2 \cdot I_2) = I_2 \cdot I_2 = I_2.$$

3. *Resolver* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} = x + 0 + x^2 - 0 - 0 - 0 = x + x^2; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5.$$

Sustituyendo: $x + x^2 + 3 = 5 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0;$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2.$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Determinar el signo de los términos de los desarrollos de los siguientes determinantes de orden 4 y 5:

a) $a_{12}a_{34}a_{41}a_{23}$; *b)* $a_{44}a_{33}a_{21}a_{12}$; *c)* $a_{24}a_{12}a_{33}a_{51}a_{45}$; *d)* $a_{22}a_{44}a_{55}a_{31}a_{13}$.

Aplicando la propiedad conmutativa de la multiplicación de números, se escribe cada uno de los términos en el orden natural de los subíndices de las filas; a continuación, se determina el índice (i) de la permutación formada por los subíndices de las columnas; dicho índice indica el signo del término.

a) $a_{12}a_{34}a_{41}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$.

Los subíndices de las columnas presentan la permutación (2,3,4,1).

Se hallan las inversiones de los pares de elementos de la permutación:

2,3 no; 2,4 no; 2,1 sí; 3,4 no; 3,1 sí; 4,1 sí.

El número de inversiones es $\epsilon = 3 \rightarrow i = (-1)^3 = -1$.

El término tiene signo menos: $-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$.

b) $a_{44}a_{33}a_{21}a_{12} = a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$.

Los subíndices de las columnas presentan la permutación (2,1,3,4).

Se hallan las inversiones de los pares de elementos de la permutación:

2,1 sí; 2,3 no; 2,4 no; 1,3 no; 1,4 no; 3,4 no.

El número de inversiones es $\epsilon = 1 \rightarrow i = (-1)^1 = -1$.

El término lleva el signo menos: $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$.

c) $a_{24}a_{12}a_{33}a_{51}a_{45} = a_{12}a_{24}a_{33}a_{45}a_{51}$.

Los subíndices de las columnas presentan la permutación (2,4,3,5,1).

Se hallan las inversiones de los pares de elementos de la permutación:

2,4 no; 2,3 no; 2,5 no; 2,1 sí; 4,3 sí; 4,5 no; 4,1 sí; 3,5 no; 3,1 sí; 5,1 sí.

El número de inversiones es $\epsilon = 5 \rightarrow i = (-1)^5 = -1$.

El término tiene signo menos: $-a_{12}a_{24}a_{33}a_{45}a_{51}$.

d) $a_{22}a_{44}a_{55}a_{31}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55}$.

Los subíndices de las columnas presentan la permutación (3,2,1,4,5).

Se hallan las inversiones de los pares de elementos de la permutación:

3,2 sí; 3,1 sí; 3,4 no; 3,5 no; 2,1 sí; 2,4 no; 2,5 no; 1,4 no; 1,5 no; 4,5 no.

El número de inversiones es $\epsilon = 3 \rightarrow i = (-1)^3 = -1$.

El término lleva signo menos: $-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55}$.

2. Calcular el desarrollo de estos determinantes por la regla de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; *b)* $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$; *c)* $\begin{vmatrix} m & 0 & m^2-1 \\ 1 & m^2 & m+1 \\ 0 & m^3 & m-1 \end{vmatrix}$.

Aplicando la regla de Sarrus, resulta:

$$a)\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot(-3) + 0\cdot(-1)\cdot(-2) + (-2)\cdot 2\cdot(-2) - (-2)\cdot 1\cdot(-2) - 2\cdot(-1)\cdot(-1) - 0\cdot(-2)\cdot(-3) = 3 + 0 + 8 - 4 - 2 - 0 = 11 - 6 = 5.$$

$$b) \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 \cdot 7 + 6 \cdot 9 \cdot 5 + 7 \cdot 6 \cdot 7 - 5 \cdot 8 \cdot 7 - 6 \cdot 9 \cdot 5 - 6 \cdot 7 \cdot 7 = 0.$$

$$c) \begin{vmatrix} m & 0 & m^2-1 \\ 1 & m^2 & m+1 \\ 0 & m^3 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 \cdot (m-1) + 0 + m^3(m^2-1) - 0 - m^4(m+1) - 0 = \\ = m^3(m - 1 + m^2 - 1 - m^2 - m) = -2m^3.$$

3. ¿Qué diferencia existe entre menor complementario y adjunto de un elemento? Si hay alguna relación entre ambos conceptos, escribir la expresión matemática de dicha relación.

(Propuesto en la Univ. de León.)

- Menor complementario del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A_n es el determinante (de orden $n-1$) de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j en la matriz A_n. Se representa por M_{ij}.
- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A_n es el menor complementario del elemento afectado del coeficiente $(-1)^{i+j}$. Se representa por A_{ij}.
- La expresión matemática que expresa la relación entre ambos es:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \rightarrow \begin{cases} A_{ij} = M_{ij} \text{ si } i + j \text{ es número par,} \\ A_{ij} = -M_{ij} \text{ si } i + j \text{ es número impar.} \end{cases}$$

4. Desarrollar los determinantes siguientes por los elementos de una línea:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}; \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}; \qquad c) \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix}.$$

a) Desarrollando por los elementos de la tercera fila y aplicando posteriormente la regla de Sarrus, se deduce:

$$|A| = 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 5 & 5 & -4 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix};$$

$$|A| = 0 - 3 \cdot (-72 + 45 + 20 - 60 - 45 + 24) + 8 \cdot (12 + 60 + 8 + 10 - 18 + 32) - \\ - 5 \cdot (-15 + 120 + 12 + 15 - 36 - 40);$$

$$|A| = -3 \cdot (-88) + 8 \cdot 104 - 5 \cdot 56 = 264 + 832 - 280 = 816.$$

b) Desarrollando por los elementos de la cuarta columna y aplicando a continuación la regla de Sarrus, se obtiene:

$$|B| = -0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix};$$

$$|B| = 0 + (9 + 4 + 20 - 15 + 4 + 12) - 3 \cdot (9 + 4 + 0 - 15 + 4 + 0) + 0 = 34 - 6 = 28.$$

c) Desarrollando por los elementos de la primera columna y aplicando seguidamente la regla de Sarrus, resulta:

$$|C| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & x & -4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & x & -4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & x & -4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix};$$

$$|C| = (48 + 0 + 20x - 30 + 0 + 16) - 2 \cdot (-24x + 0 + 12x - 18 - 0 + 0) +$$
$$+ 3 \cdot (-4x + 0 - 6x - 3 - 5x^2 - 0) - 0;$$
$$|C| = (20x + 34) - 2 \cdot (-12x - 18) + 3 \cdot (-5x^2 - 10x - 3) - 0 = -15x^2 + 14x + 61.$$

5. Comprobar que $\begin{vmatrix} x^2 & 2xy & y^2 \\ y^2 & x^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 & x^2 \end{vmatrix} = (x^3 + y^3)^2.$

Calculando el valor del determinante por la regla de Sarrus, se deduce:

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2xy & y^2 \\ y^2 & x^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 & x^2 \end{vmatrix} = x^6 + 8x^3y^3 + y^6 - 2x^3y^3 - 2x^3y^3 - 2x^3y^3 = x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = (x^3 + y^3)^2.$$

Queda, pues, comprobada la igualdad propuesta.

6. Resolver la ecuación, en caso de que sea posible:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 2x + 2x^2 - 2 = 4 - 3;\ 2x^2 + 2x - 3 = 0;$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2},\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}.$$

7. Resolver las ecuaciones siguientes, en los casos que sean posibles:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ x & 7 & -1 \\ 6 & 12 & x \end{vmatrix} = 0;$

b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & x & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

c) $\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$; razonar la respuesta;

d) $\begin{vmatrix} x - 1 & 0 & 0 \\ x & x + 1 & 0 \\ 2 & x & x \end{vmatrix} = 0.$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ x & 7 & -1 \\ 6 & 12 & x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 28x - 30 + 36x - 126 + 48 - 5x^2 = 0;\ 5x^2 - 64x + 108 = 0;$

$$x = \frac{64 \pm \sqrt{4\,096 - 2\,160}}{10} = \frac{64 \pm \sqrt{1\,936}}{10} = \frac{64 \pm 44}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{108}{10} = \frac{54}{5},\ x_2 = \frac{20}{10} = 2.$$

b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & x & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x^2 - x^2 = 0;\ 0 = 0.$

La identidad resultante indica que la igualdad se cumple para cualquier valor de x.

c) El primer miembro es el determinante de una suma de matrices. Como el primer sumando es una matriz cuadrada de orden 3 y el segundo una matriz cuadrada de orden 2, no se pueden sumar (ya que para ser conformes respecto a la adición las matrices han de ser del mismo orden); por tanto, no tiene sentido la proposición del ejercicio.

d) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ x & x+1 & 0 \\ 2 & x & x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)\cdot\begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ x & x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)\,[(x+1)x - 0] = 0;$

$(x-1)(x+1)x = 0;\ x - 1 = 0;\ x + 1 = 0;\ x = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0.$

8. Demostrar que es 4 el valor máximo que puede tomar un determinante de tercer orden cuyos términos son todos iguales a $+1$ o a -1.

(Propuesto en la Univ. de Sevilla.)

Por las propiedades de los determinantes, si un determinante tiene dos líneas (filas o columnas) iguales o proporcionales, su desarrollo es igual a cero. Por consiguiente, el valor de un determinante de orden 3, cuyos términos son todos iguales a $+1$ o a -1, es cero si tiene, al menos, dos líneas con tres elementos iguales a $+1$ o iguales a -1.

Las posibles formas para que no se anule dicho determinante son, pues:

a) Que tenga una fila (columna) cuyos elementos sean todos $+1$ y las otras dos filas (columnas) cuyos elementos sean dos $+1$ y un -1, con los elementos -1 en distintas columnas (filas); por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 4.$$

b) Que los elementos de las tres filas (columnas) sean dos $+1$ y un -1, con los elementos -1 en distintas columnas (filas); por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 = -4.$$

c) Que tenga una fila (columna) cuyos elementos sean tres -1 y las otras dos filas (columnas) cuyos elementos sean dos -1 y un $+1$, con los elementos $+1$ en distintas columnas (filas); por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 = -4.$$

d) Que los elementos de las tres filas (columnas) sean dos -1 y un $+1$, con los elementos $+1$ en distintas columnas (filas); por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 = 4.$$

Por tanto, el valor de un determinante de orden 3, cuyos términos son todos iguales a $+1$ o a -1, sólo puede ser igual a 4, a 0 o a -4. Es decir, el valor máximo de dicho determinante es 4, como había que demostrar.

TEMA I-2.2. ——— Propiedades de los determinantes

Ejercicios resueltos

1. *Obtener* $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ *(determinante de Vandermonde).*

Se sustituye la 2.ª fila por su suma con la 1.ª multiplicada por $-a$, $-a\,(1, 1, 1) = (-a, -a, -a)$. Se sustituye la 3.ª fila por su suma con la 2.ª multiplicada por $-a$, $-a\,(a, b, c) = (-a^2, -ab, -ac)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-a & b-a & c-a \\ a^2-a^2 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (b-a) & (c-a) \\ 0 & (b-a)b & (c-a)c \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la 1.ª columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} (b-a) & (c-a) \\ (b-a)b & (c-a)c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

2. *Demostrar, mediante transformaciones de la matriz que no alteren el valor del determinante, que*

$$|A| = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = -x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Sumando a la 1.ª columna la 2.ª multiplicada por x, la 3.ª multiplicada por x^2, la 4.ª multiplicada por x^3 y la 5.ª multiplicada por x^4:

$$\begin{gathered}(-x, 0, 0, 0, e) + x\cdot(1, -x, 0, 0, d) + x^2\cdot(0, 1, -x, 0, c) + x^3\cdot(0, 0, 1, -x, b) + \\ + x^4\cdot(0, 0, 0, 1, a-x) = [-x + x + 0 + 0 + 0,\ 0 - x^2 + x^2 + 0 + 0,\ 0 + 0 - x^3 + x^3 + 0, \\ 0 + 0 + 0 - x^4 + x^4,\ e + dx + cx^2 + bx^3 + (a-x)x^4] = \\ = (0, 0, 0, 0, e + dx + cx^2 + bx^3 + ax^4 - x^5).\end{gathered}$$

Sustituyendo la primera columna de $|A|$ por el valor anterior, resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e + dx + cx^2 + bx^3 + ax^4 - x^5 & d & c & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la 1.ª columna, como para a_{51}, $i = (-1)^{5+1} = (-1)^6 = +1$, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \end{vmatrix}\cdot(e + dx + cx^2 + bx^3 + ax^4 - x^5) =$$

$$= (1\cdot1\cdot1\cdot1)\cdot(e + dx + cx^2 + bx^3 + ax^4 - x^5) = e + dx + cx^2 + bx^3 + ax^4 - x^5,$$

ya que la matriz de dicho determinante es triangular.

3. *Sin desarrollar, probar que es múltiplo de 15 el determinante* $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

Sustituyendo la 3.ª columna por su suma con la 1.ª multiplicada por 100 y con la 2.ª multiplicada por 10, y al ser 150 : 15 = 10, 225 : 15 = 15, 255 : 15 = 17, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 + 1 \cdot 100 + 5 \cdot 10 \\ 2 & 2 & 5 + 2 \cdot 100 + 2 \cdot 10 \\ 2 & 5 & 5 + 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 150 \\ 2 & 2 & 225 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 15 \cdot 10 \\ 2 & 2 & 15 \cdot 15 \\ 2 & 5 & 15 \cdot 17 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & 15 \\ 2 & 5 & 17 \end{vmatrix}.$$

Por tanto, $|A|$ es el producto de 15 por un número (distinto de cero), por lo que es múltiplo de 15.

Solución de los ejercicios propuestos

Nota: Para el estudio de las propiedades que se aplican en los ejercicios siguientes, véase el correspondiente libro de teoría.

1. Sin desarrollar, probar la igualdad $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0.$

La cuarta fila del determinante es combinación lineal de las tres primeras (se obtiene sumando las filas segunda y tercera y restando la primera). Por tanto, de acuerdo con la propiedad **10**, el determinante es cero.

2. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcular:

a) $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; *b)* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ a+3 & b & c+5 \end{vmatrix}$.

a) En virtud de la propiedad **4**, como en la segunda columna $0 = 2 \cdot 0$ y $2 = 2 \cdot 1$, se tiene:

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 \cdot b & c \\ 3 & 2 \cdot 0 & 5 \\ 1 & 2 \cdot 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 = 2.$$

b) La tercera fila del determinante es combinación lineal de las dos primeras (se obtiene sumando ambas filas). Por consiguiente, por la propiedad **10**, el valor del determinante es cero.

3. Calcular sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; *c)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; *d)* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

a) Los términos de la tercera fila se pueden escribir como suma de dos sumandos ($7 = 4 + 3$, $8 = 5 + 3$, $9 = 6 + 3$) y aplicar al determinante que resulta la propiedad **14:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4+3 & 5+3 & 6+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

El primer determinante del último miembro es cero de acuerdo con la propiedad **8** y al segundo se puede aplicar también la propiedad **14**; por tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Los dos determinantes son cero en virtud de la propiedad **8**; por consiguiente, el determinante propuesto tiene valor cero.

Puede verse más fácilmente que el determinante es nulo porque su tercera fila es combinación lineal de las otras dos (se obtiene sumando a la segunda la diferencia entre la segunda y la primera) y, por la propiedad **10**, su valor es cero.

b) En virtud de la propiedad **4**, como en la segunda fila $0 = 2 \cdot 0$ y $2 = 2 \cdot 1$, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Por la propiedad **fundamental** el valor del determinante no varía si se sustituye la tercera fila del último determinante por la que resulta al restarle la segunda (combinación lineal de las filas segunda y tercera). Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 6,$$

porque el último determinante es de forma triangular (superior) y su valor es el producto de los elementos de la diagonal principal.

c) Por la propiedad **fundamental** el valor del determinante no varía si se efectúan sucesivamente las siguientes transformaciones:

1) Se sustituye la tercera columna por la que resulta al restarle la primera.

2) En el determinante obtenido se cambia la segunda fila por la que se deduce al restarle la cuarta.

3) En el determinante que resulta se sustituye la segunda fila por la que se obtiene al sumarle la tercera.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2,$$

ya que el último determinante es de una matriz triangular.

d) Aplicando la propiedad **fundamental** se obtiene un determinante de forma triangular (equivalente al dado), efectuando las siguientes transformaciones sucesivas:

1) Se sustituye la primera fila por la que resulta al restarle la segunda.

2) En el determinante obtenido se cambia la segunda fila por la que se deduce al sumarle la cuarta.

3) En el determinante que resulta se sustituye la segunda fila por la que se obtiene al restarle la tercera.

4) En el determinante que se obtiene se cambia la segunda columna por la que resulta al sumarle el doble de la primera.

5) En el determinante obtenido se intercambian las columnas tercera y cuarta (cambia el signo del determinante de acuerdo con la propiedad **7**).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{4)}{=}$$

$$\overset{4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{5)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) = 2,$$

ya que el último determinante es de una matriz triangular.

4. Hallar $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & a+c \end{vmatrix}$.

Se aplica la propiedad **fundamental** sustituyendo la primera fila por la que resulta al restarle la suma de las filas segunda y tercera:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & a+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2b & -2a \\ a & b+c & a \\ b & b & a+c \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & b & a \\ a & b+c & a \\ b & b & a+c \end{vmatrix}.$$

(Al determinante obtenido se ha aplicado la propiedad **4.**)

Desarrollando por los elementos de la primera fila, se obtiene:

$$|A| = -2\left(-b \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ b & a+c \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} a & b+c \\ b & b \end{vmatrix}\right) = 2b\,[a(a+c) - ab] - 2a\,[ab - b(b+c)];$$

$$|A| = 2a^2b + 2abc - 2ab^2 - 2a^2b + 2ab^2 + 2abc = 4abc.$$

5. Calcular $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

La tercera fila del determinante es proporcional a la primera (los elementos de la tercera fila son el doble de los de la primera). Por tanto, por la propiedad **9,** el valor del determinante es cero.

6. Hallar el valor de $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & a+b & b & c \\ 1 & a & b+c & c \\ 1 & a & b & c+a \end{vmatrix}$.

Se aplica la propiedad **fundamental** sustituyendo las filas segunda, tercera y cuarta por las que resultan al restarles la primera fila. Se obtiene un determinante de forma triangular (superior), equivalente al dado.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & a+b & b & c \\ 1 & a & b+c & c \\ 1 & a & b & c+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot b \cdot c \cdot a = abc.$$

7. Hallar el valor de $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1 + y_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 + y_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n + y_n \end{vmatrix}$.

Se procede como en el ejercicio anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1 + y_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 + y_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n + y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 0 & y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & y_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_n \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n = y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n.$$

8. Comprobar que cada uno de los siguientes determinantes es múltiplo del número que se indica:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} \text{ de } 12; \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} \text{ de } 5.$$

a) Sustituyendo la tercera columna por la que resulta al sumarla con la primera multiplicada por 100 y con la segunda multiplicada por 10, de acuerdo con la propiedad **fundamental**, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 4 \\ 2 & 4 & 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 0 \\ 0 & 3 & 0 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 144 \\ 2 & 4 & 240 \\ 0 & 3 & 36 \end{vmatrix}.$$

Como en la tercera columna del último determinante (equivalente al dado) $144 = 12 \cdot 12$, $240 = 12 \cdot 20$ y $36 = 12 \cdot 3$, por la propiedad **4**, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 12 \cdot 12 \\ 2 & 4 & 12 \cdot 20 \\ 0 & 3 & 12 \cdot 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 2 & 4 & 20 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot k = \dot{12}.$$

Nota: Obsérvese que $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 2 & 4 & 20 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Sin embargo, $0 = 12 \cdot 0 = \dot{12}$; por tanto, el determinante dado es múltiplo de 12.

b) Sustituyendo la cuarta fila por la que se obtiene al sumarla con la primera multiplicada por 1 000, con la segunda multiplicada por 100 y con la tercera multiplicada por 10, en virtud de la propiedad **fundamental**, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1\,215 & 2\,340 & 35 & 5\,020 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 5 \cdot 243 & 5 \cdot 468 & 5 \cdot 7 & 5 \cdot 1\,004 \end{vmatrix}.$$

Por la propiedad **4**, se deduce:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 243 & 468 & 7 & 1\,004 \end{vmatrix} = 5 \cdot k = \dot{5}.$$

El determinante dado es igual al producto de 5 por un número k; es decir, es múltiplo de 5.

Se comprueba mucho más fácilmente que el determinante dado es múltiplo de 5 aplicando la propiedad **4** en la última fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 1 & 5 \cdot 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot k = \dot{5}.$$

9. Calcular el determinante de Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$.

Aplicando la propiedad **fundamental** el valor del determinante no varía si se efectúan en él las transformaciones siguientes:

1) Se sustituye la segunda fila por la diferencia entre la segunda y la primera multiplicada por a.

2) Se cambia la tercera fila por la diferencia entre la tercera y la segunda multiplicada por a.

3) Se sustituye la cuarta fila por la diferencia entre la cuarta y la tercera multiplicada por a.

Se obtiene el determinante equivalente:

$$|V_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (b-a) & (c-a) & (d-a) \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la primera columna y aplicando la propiedad **4**, se tiene:

$$|V_4| = 1 \cdot \begin{vmatrix} (b-a) & (c-a) & (d-a) \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}.$$

Procediendo de forma similar para el determinante de orden 3, por la propiedad **fundamental**, el valor del determinante no varía al efectuar en él las siguientes transformaciones:

1) Se sustituye la segunda fila por la diferencia entre la segunda y la primera multiplicada por b.

2) Se cambia la tercera fila por la diferencia entre la tercera y la segunda multiplicada por b.

Resulta el determinante equivalente:

$$|V_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-bc & d^2-bd \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (c-b) & (d-b) \\ 0 & c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la primera columna y aplicando la propiedad **4**, se obtiene:

$$|V_3| = 1 \cdot \begin{vmatrix} (c-b) & (d-b) \\ c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} = (c-b)(d-b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = (c-b)(d-b)(d-c).$$

Sustituyendo, se deduce que $|V_4| = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

Nota: Se puede hallar el valor de $|V_4|$ por **inducción**, calculando previamente los valores de $|V_2|$ y $|V_3|$ y extendiendo los resultados para el cálculo de $|V_4|$.

El valor de $|V_2|$ es:

$$|V_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1).$$

Para calcular $|V_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$ se aplica la propiedad **fundamental**, efectuando en el determinante las siguientes transformaciones que no varían su valor:

1) Se sustituye la segunda fila por la diferencia entre la segunda y la primera multiplicada por a_1.

2) Se cambia la tercera fila por la diferencia entre la tercera y la segunda multiplicada por a_1.

Se obtiene el determinante equivalente:

$$|V_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1a_2 & a_3^2 - a_1a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la primera columna y aplicando la propiedad **4**, se tiene:

$$|V_3| = 1 \cdot \begin{vmatrix} (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

El valor del determinante de Vandermonde para los órdenes 2 y 3, determinantes $|V_2|$ y $|V_3|$, resulta ser igual al producto de las diferencias $a_j - a_i$, $\forall j > i$ y $2 \le j \le n$ $(1 \le i \le n - 1)$, siendo n el orden del determinante.

Por inducción, suponiendo que la conclusión anterior se cumple para determinantes de órdenes superiores, se obtiene:

$$|V_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3).$$

10. Probar que $\begin{vmatrix} 1 + a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 - b \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2.$

Aplicando la propiedad **fundamental** se obtiene un determinante equivalente al dado, efectuando las siguientes transformaciones sucesivas:

1) Se sustituyen las tres primeras filas por las que resultan al restarles la fila inmediata siguiente.

2) En el determinante obtenido se aplica la propiedad **4**, sacando el factor común a de la primera fila y el b de la tercera fila.

3) En el determinante que resulta se cambia la cuarta fila por la que se obtiene al restarle la primera.

$$\begin{vmatrix} 1 + a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 - b \end{vmatrix} \overset{1)}{=} \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & -a & -b & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 - b \end{vmatrix} \overset{2)}{=}$$

$$\overset{2)}{=} ab \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 - b \end{vmatrix} \overset{3)}{=} ab \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - b \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el último determinante por los elementos de la primera columna y aplicando la regla de Sarrus al determinante de orden 3 que se obtiene, resulta:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = ab \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -a & -b & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} =$$

$$= ab \cdot [-a(1-b) + a] = ab \cdot ab = a^2 \cdot b^2.$$

11. Comprobar que $\begin{vmatrix} a-1 & a^2-1 & a^3-1 \\ 2a-4 & a^2-4 & a^3-8 \\ 3a-9 & a^2-9 & a^3-27 \end{vmatrix} = -2a(a-1)(a-2)(a-3).$

Se descomponen en factores los binomios que aparecen como elementos del determinante (para a^3-1, a^3-8 y a^3-27 se aplica la regla de Ruffini):

$$\begin{array}{lll} a-1=(a-1); & a^2-1=(a-1)(a+1); & a^3-1=(a-1)(a^2+a+1); \\ 2a-4=2(a-2); & a^2-4=(a-2)(a+2); & a^3-8=(a-2)(a^2+2a+4); \\ 3a-9=3(a-3); & a^2-9=(a-3)(a+3); & a^3-27=(a-3)(a^2+3a+9). \end{array}$$

El determinante se escribe, pues:

$$\begin{vmatrix} a-1 & a^2-1 & a^3-1 \\ 2a-4 & a^2-4 & a^3-8 \\ 3a-9 & a^2-9 & a^3-27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a-1) & (a-1)(a+1) & (a-1)(a^2+a+1) \\ 2(a-2) & (a-2)(a+2) & (a-2)(a^2+2a+4) \\ 3(a-3) & (a-3)(a+3) & (a-3)(a^2+3a+9) \end{vmatrix}.$$

Aplicando la propiedad **4** se saca factor común $(a-1)$ en la primera fila, $(a-2)$ en la segunda y $(a-3)$ en la tercera; se tiene:

$$|A| = (a-1)(a-2)(a-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & (a+1) & (a^2+a+1) \\ 2 & (a+2) & (a^2+2a+4) \\ 3 & (a+3) & (a^2+3a+9) \end{vmatrix}.$$

Por la propiedad **fundamental** el determinante no varía su valor al efectuar en él las siguientes transformaciones sucesivas:

1) Se sustituyen las dos últimas columnas por las que resultan al restarles la columna inmediata anterior.

2) En el determinante obtenido se cambian las dos filas últimas por las que se obtienen al restarles la fila inmediata anterior.

$$|A| \overset{1)}{=} (a-1)(a-2)(a-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 2 & a & a^2+a+2 \\ 3 & a & a^2+2a+6 \end{vmatrix} \overset{2)}{=}$$

$$\overset{2)}{=} (a-1)(a-2)(a-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 0 & a+2 \\ 1 & 0 & a+4 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la segunda columna, se deduce:

$$|A| = (a-1)(a-2)(a-3)(-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a+2 \\ 1 & a+4 \end{vmatrix} = -2a(a-1)(a-2)(a-3).$$

12. Probar que $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix} = ac - bd.$

Se aplica la propiedad **fundamental**, efectuando en el determinante las siguientes transformaciones sucesivas, que no varían su valor:

1) Se sustituye la primera fila por la que resulta al sumarle la tercera.

2) En el determinante obtenido, aplicando la propiedad **4**, se cambia la primera fila por la que se deduce al multiplicarla por d (se supone que d $\neq$ 0); para que el determinante no varíe se divide por d.

3) En el determinante que resulta se sustituye la cuarta fila por la que se obtiene al restarle la primera.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{2)}{=}$$

$$\overset{2)}{=} \frac{1}{d} \cdot \begin{vmatrix} -d & d & d & -d & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{3)}{=} \frac{1}{d} \cdot \begin{vmatrix} -d & d & d & -d & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a+d & -d & -d & 0 & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la quinta columna, se tiene:

$$|A| = (-1) \cdot \frac{1}{d} \cdot \begin{vmatrix} -d & d & d & -d \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ a+d & -d & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la cuarta columna, se obtiene:

$$|A| = -\frac{1}{d} \cdot d \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a+d & -d & -d \\ 0 & b & -c \end{vmatrix} = -1[cd + bd - (a+d)c] = ac - bd.$$

13. Comprobar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = n!$

Se aplica la propiedad **fundamental** y se obtiene un determinante de forma triangular (equivalente al dado), al sustituir las n − 1 últimas filas por las que resultan al restarles la fila inmediata anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \overset{(n}{\dots} \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

La hipótesis del ejercicio es falsa, ya que el valor del determinante es 1 y no n!

14. Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = 0.$

Desarrollando el determinante por los elementos de la primera columna, se tiene:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & x & -4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & x & -4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & x & -4 \end{vmatrix} - 0 = 0.$$

Aplicando la regla de Sarrus a los tres determinantes de orden 3, se deduce:

$$(48 + 0 + 20x - 30 + 0 + 16) - 2(-24x + 0 + 12x - 18 - 0 + 0) +$$

$$+ 3(-4x + 0 - 6x - 3 - 5x^2 - 0) = 0;$$

$$48 + 20x - 30 + 16 + 48x - 24x + 36 - 12x - 18x - 9 - 15x^2 = 0; \quad -15x^2 + 14x + 61 = 0;$$

$$15x^2 - 14x - 61 = 0;$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 3\,660}}{30} \approx \frac{14 \pm 62}{30} \rightarrow x_1 \approx \frac{76}{30} = \frac{38}{15}, \; x_2 \approx -\frac{48}{30} = -\frac{8}{5}.$$

15. Disponer en forma de matriz triangular y calcular, por el método de Gauss, el valor de los determinantes de los ejercicios **3**, **5** y **13** (n = 5).

Ejercicio **3**

a)

$\boxed{1}$	2	3	1	2	3
4	5	6			
7	8	9			
0	$1 \cdot 5 - 4 \cdot 2$	$1 \cdot 6 - 4 \cdot 3 =$	0	$\boxed{-3}$	-6
0	$1 \cdot 8 - 7 \cdot 2$	$1 \cdot 9 - 7 \cdot 3 =$	0	-6	-12

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 0.$$

En este ejercicio no es necesario seguir el proceso, ya que las filas segunda y tercera del determinante equivalente que resulta son proporcionales (la tercera se obtiene multiplicando por 2 la segunda); por la propiedad **9** el valor del determinante es cero.

b)

$\boxed{1}$	0	2	1	0	2	1 0 2
0	2	0				
0	1	3				
0	$1 \cdot 2 - 0 \cdot 0$	$1 \cdot 0 - 0 \cdot 2 =$	0	$\boxed{2}$	0	0 2 0
0	$1 \cdot 1 - 0 \cdot 0$	$1 \cdot 3 - 0 \cdot 2 =$	0	3	3	
			0	0	$2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 =$	0 0 $\boxed{6}$

El determinante equivalente en forma triangular es: $|B| = \dfrac{1}{1^2 \cdot 2^1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

Los pivotes son: 1, 2 y 6.

Como $n = 3$, $n - 2 = 3 - 2 = 1$.

Por tanto, el valor del determinante es: $|B| = \dfrac{6}{1^1} = 6$.

c) A partir de este ejercicio se aplica el método de Gauss utilizando el cuadro acostumbrado.

$$
\begin{array}{cccc}
\boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & \boxed{-1} & -1 \\
0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \boxed{-2}
\end{array}
$$

El determinante equivalente en forma triangular es:

$$|C| = \frac{1}{1^3 \cdot 1^2 \cdot (-1)^1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Los pivotes son: 1, 1, -1 y -2.

Como $n = 4$, $n - 2 = 4 - 2 = 2$ y $n - 3 = 4 - 3 = 1$.

Por tanto, el valor del determinante es:

$$|C| = \frac{-2}{1^2 \cdot 1^1} = -2.$$

d)

$$
\begin{array}{cccc}
\boxed{1} & -1 & 2 & -2 \\
0 & 1 & 2 & -2 \\
2 & -2 & 0 & -1 \\
-1 & 2 & -2 & 1 \\
\hline
0 & \boxed{1} & 2 & -2 \\
0 & 0 & -4 & 3 \\
0 & 1 & 0 & -1 \\
\hline
0 & 0 & \boxed{-4} & 3 \\
0 & 0 & -2 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \boxed{2}
\end{array}
$$

El determinante equivalente en forma triangular es:

$$|D| = \frac{1}{1^3 \cdot 1^2 \cdot (-4)^1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Los pivotes son: 1, 1, -4 y 2.

Como $n = 4$, $n - 2 = 4 - 2 = 2$ y $n - 3 = 4 - 3 = 1$.

Por tanto, el valor del determinante es:

$$|D| = \frac{2}{1^2 \cdot 1^1} = 2.$$

Ejercicio **5**

$$
\begin{array}{cccc}
\boxed{2} & 1 & 3 & -2 \\
1 & 0 & 2 & 3 \\
4 & 2 & 6 & -4 \\
1 & 0 & -3 & 2 \\
\hline
0 & \boxed{-1} & 1 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -9 & 6 \\
\hline
\end{array}
$$

En este ejercicio no es necesario seguir el proceso, porque se obtiene el determinante equivalente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \end{vmatrix},$$

en el que todos los elementos de la tercera fila son cero; por la propiedad **3** el valor del determinante es cero.

Ejercicio 13

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1}
\end{array}
$$

El determinante equivalente en forma triangular es:

$$|A| = \frac{1}{1^4 \cdot 1^3 \cdot 1^2 \cdot 1^1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Los pivotes son: 1, 1, 1, 1 y 1.

Como $n = 5$, $n - 2 = 5 - 2 = 3$, $n - 3 = 5 - 3 = 2$ y $n - 4 = 5 - 4 = 1$.

Por tanto, el valor del determinante es:

$$|A| = \frac{1}{1^3 \cdot 1^2 \cdot 1^1} = 1.$$

16. Calcular $\begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix}$.

Aplicando la regla de Sarrus, resulta:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix} = 0 + (1+i)(2-3i)(1-2i) + (1-i)(2+3i)(1+2i) - 0 =$$
$$= 2 - 5i - i^2 + 6i^3 + 2 + 5i - i^2 - 6i^3 = 4 - 2i^2 = 4 + 2 = 6.$$

TEMA I-3.1. — Dependencia lineal. Rango de una matriz

Ejercicios resueltos

1. *Determinar los valores propios de* $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

La ecuación característica es: $|A_3 - \lambda \cdot I_3| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Desarrollando por los elementos de la 3.ª columna:

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\,[(4-\lambda)(3-\lambda)-2] = (2-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2-\lambda = 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} \rightarrow \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 2. \end{cases}$$

Son valores propios: $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 5$.

Nota: Dichos valores convierten la matriz $A_3 - \lambda \cdot I_3$ en otra matriz del mismo orden con determinante igual a cero (matriz singular).

2. *Calcular los valores de* t *para los que es* 2 *la característica de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Si el rango (o la característica) es 2, el determinante de orden 3 es cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2t + 6 + 6 - 6 - 6 - 2t = 0.$$

En el desarrollo del determinante resulta cero, por consiguiente: $0 = 0$.

Es resultado acorde, ya que el determinante tiene proporcionales las filas 1.ª y 2.ª, por lo que, independientemente de la 3.ª fila, su valor es cero.

El rango es 2 para todo valor de t, excepto para $t = 3$.

3. *Hallar la dimensión del subespacio vectorial engendrado por los vectores* $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$ *y* $\mathbf{a}_3 = (2, 3, 1, 0)$.

El problema se reduce a determinar el rango de dichos vectores, es decir, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow r = 3.$

Solución de los ejercicios propuestos

Nota: Para el estudio de las propiedades aplicadas en los ejercicios siguientes, véase el correspondiente libro de teoría.

1. Las siguientes matrices tienen sus vectores fila linealmente dependientes. Hallar los valores de los escalares $k_1, k_2, ..., k_p$ (no todos nulos) que verifican la definición de vectores linealmente dependientes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; *c)* $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Para que los vectores fila sean linealmente dependientes ha de ser cero el valor del determinante de cada una de las matrices cuadradas del ejercicio.

a) La fila tercera del determinante es combinación lineal de las dos primeras (se obtiene sumando las filas primera y segunda). Por consiguiente, de acuerdo con la propiedad **10**, el valor del determinante es cero.

Existen, pues, unos números k_1, k_2 y k_3 (no todos ellos cero), tales que:

$$k_1(1,2,3) + k_2(4,5,6) + k_3(5,7,9) = (0,0,0).$$

Se obtiene el sistema indeterminado $\left\{\begin{array}{l} k_1 + 4k_2 + 5k_3 = 0 \\ 2k_1 + 5k_2 + 7k_3 = 0 \\ 3k_1 + 6k_2 + 9k_3 = 0 \end{array}\right.$, una de cuyas soluciones es $k_1 = 1$,

$k_2 = 1$ y $k_3 = -1$, que son los escalares pedidos.

b) Las filas primera y segunda del determinante son iguales. Por tanto, por la propiedad **8**, el valor del determinante es cero.

Existen, pues, unos números k_1, k_2, k_3 y k_4 (no todos nulos), tales que:

$$k_1(1,1,2,2) + k_2(1,1,2,2) + k_3(2,0,1,1) + k_4(3,1,3,3) = (0,0,0,0).$$

Una de las soluciones del sistema indeterminado $\left\{\begin{array}{l} k_1 + k_2 + 2k_3 + 3k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 + 0k_3 + k_4 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 + k_3 + 3k_4 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 + k_3 + 3k_4 = 0 \end{array}\right.$ es $k_1 = 1$,

$k_2 = -1$, $k_3 = 0$ y $k_4 = 0$, que son los escalares que se piden.

c) La primera fila del determinante es combinación lineal de las otras dos (se obtiene sumando las filas segunda y tercera). De acuerdo con la propiedad **10**, el valor del determinante es cero.

Existen, pues, unos números k_1, k_2 y k_3 (no todos cero), tales que:

$$k_1(2,4,6) + k_2(1,3,5) + k_3(1,1,1) = (0,0,0).$$

Una solución del sistema indeterminado $\left\{\begin{array}{l} 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ 4k_1 + 3k_2 + k_3 = 0 \\ 6k_1 + 5k_2 + k_3 = 0 \end{array}\right.$ es $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ y $k_3 = -1$,

que son los escalares pedidos.

d) La tercera fila del determinante es combinación lineal de las dos primeras (se obtiene sumando a la segunda el doble de la primera). En virtud de la propiedad **10**, el valor del determinante es cero.

Existen, pues, unos números k_1, k_2 y k_3 (no todos nulos), tales que:

$$k_1(1,2,1) + k_2(2,1,0) + k_3(4,5,2) = (0,0,0).$$

Una de las soluciones del sistema indeterminado $\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + 5k_3 = 0 \\ k_1 + 0k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}$ es $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ y $k_3 = -1$, que son los escalares que se piden.

2. En cada uno de los casos del ejercicio anterior analizar la dependencia lineal del tercer vector columna respecto de los demás vectores columna.

Como en los cuatro casos el valor del determinante es igual a cero, los vectores fila y los vectores columna son linealmente dependientes. Por consiguiente, al menos uno de los vectores (fila o columna) depende linealmente de los demás. Se analiza la dependencia lineal del tercer vector columna respecto de los demás vectores columna en cada uno de los casos.

a) $\alpha(1,4,5) + \beta(2,5,7) = (3,6,9) \rightarrow (\alpha + 2\beta, 4\alpha + 5\beta, 5\alpha + 7\beta) = (3,6,9) \rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 3, \\ 4\alpha + 5\beta = 6, \\ 5\alpha + 7\beta = 9. \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ 4\alpha + 5\beta = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4\alpha + 8\beta = 12 \\ -4\alpha - 5\beta = -6 \end{cases} \rightarrow 3\beta = 6 \rightarrow \beta = 2, \alpha = 3 - 2\beta = 3 - 4 = -1.$$

La solución satisface también la tercera ecuación, $5 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 = -5 + 14 = 9$.

Por tanto, las coordenadas del vector columna (3,6,9), respecto de los vectores columna (1,4,5) y (2,5,7), son $\alpha = -1$ y $\beta = 2$.

b) $\alpha(1,1,2,3) + \beta(1,1,0,1) + \gamma(2,2,1,3) = (2,2,1,3) \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 2, \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 2, \\ 2\alpha + 0\beta + \gamma = 1, \\ 3\alpha + \beta + 3\gamma = 3. \end{cases}$

Como las ecuaciones primera y segunda son la misma, queda el sistema $\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 2, \\ 2\alpha + \gamma = 1, \\ 3\alpha + \beta + 3\gamma = 3. \end{cases}$

Despejando γ en la segunda ecuación, $\gamma = 1 - 2\alpha$, y sustituyendo su valor en las otras dos ecuaciones, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2(1 - 2\alpha) = 2 \\ 3\alpha + \beta + 3(1 - 2\alpha) = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2 - 4\alpha = 2 \\ 3\alpha + \beta + 3 - 6\alpha = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3\alpha + \beta = 0, \\ -3\alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

El sistema es indeterminado. Considerando como parámetro $\alpha = t$, resulta:

$$\beta = 3\alpha = 3t \text{ y } \gamma = 1 - 2\alpha = 1 - 2t.$$

Por tanto, las coordenadas del vector columna (2,2,1,3), respecto de los vectores columna (1,1,2,3), (1,1,0,1) y (2,2,1,3), son $\alpha = t$, $\beta = 3t$ y $\gamma = 1 - 2t$, $\forall t$.

c) $\alpha(2,1,1) + \beta(4,3,1) = (6,5,1) \rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 6, \\ \alpha + 3\beta = 5, \\ \alpha + \beta = 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 5 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 5 \\ -\alpha - \beta = -1 \end{cases} \rightarrow 2\beta = 4 \rightarrow \beta = 2, \alpha = 1 - \beta = 1 - 2 = -1.$$

La solución satisface también la primera ecuación, $2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = -2 + 8 = 6$.

Por tanto, las coordenadas del vector columna (6,5,1), respecto de los vectores columna (2,1,1) y (4,3,1), son $\alpha = -1$ y $\beta = 2$.

d) $\alpha(1,2,4) + \beta(2,1,5) = (1,0,2) \rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1, \\ 2\alpha + \beta = 0, \\ 4\alpha + 5\beta = 2. \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 2 \\ -2\alpha - \beta = 0 \end{cases} \rightarrow 3\beta = 2 \rightarrow \beta = \frac{2}{3}, \alpha = 1 - 2\beta = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}.$$

La solución satisface también la tercera ecuación, $4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 5 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{10}{3} = \frac{6}{3} = 2.$

Por tanto, las coordenadas del vector columna (1,0,2), respecto de los vectores columna (1,2,4) y (2,1,5), son $\alpha = -\frac{1}{3}$ y $\beta = \frac{2}{3}$.

3. Hallar el rango de las matrices del ejercicio **1**.

a) Como $|A_3| = 0$, el rango de la matriz es $r < 3$.

Dado que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$, el rango de la matriz es $r = 2$.

b) Al ser $|B_4| = 0$, el rango de la matriz es $r < 4$.

Como la matriz tiene iguales las filas primera y segunda y las columnas tercera y cuarta, todos los determinantes de orden 3 en los que entren esas dos filas o esas dos columnas son nulos (por la propiedad **8**).

Dado que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 4 - 0 - 1 - 6 = 0$, el rango de la matriz es $r < 3$.

Al ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$, el rango de la matriz es $r = 2$.

c) Como $|C_3| = 0$, el rango de la matriz es $r < 3$.

Dado que $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$, el rango de la matriz es $r = 2$.

d) Al ser $|D_3| = 0$, el rango de la matriz es $r < 3$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$, el rango de la matriz es $r = 2$.

4. Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Como todos los elementos de la cuarta columna de la matriz son cero, por la propiedad **3**, todos los determinantes de orden 3 en los que entre esa columna son nulos.

Al ser $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 40 + 54 + 32 - 48 - 48 - 30 = 0$, el rango de la matriz es $r < 3$.

Dado que $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2 \neq 0$, el rango de la matriz es $r = 2$.

5. Hallar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Se calcula el valor de todos los determinantes de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Al ser nulos todos los determinantes de orden 3, el rango de la matriz es $r < 3$.

Como $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \neq 0$, el rango de la matriz es $r = 2$.

6. Hallar los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Los valores propios son las raíces (en λ) de la ecuación $|A_2 - \lambda \cdot I_2| = 0$.

$$A_2 - \lambda \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 = 0; \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1.$$

7. Hallar los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Se obtienen de la ecuación característica $|A_3 - \lambda \cdot I_3| = 0$.

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2(6-\lambda) + 18 + 18 - 9(1-\lambda) - 9(1-\lambda) - 4(6-\lambda) = 0;$$

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 13\lambda + 6 + 36 - 9 + 9\lambda - 9 + 9\lambda - 24 + 4\lambda = 0;$$

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 + 9\lambda = 0; \quad -\lambda(\lambda^2 - 8\lambda - 9) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\lambda = 0 \\ \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \dfrac{8 \pm 10}{2} \rightarrow \lambda_2 = 9, \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

8. Hallar los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Los valores propios son las raíces (en λ) de la ecuación $|A_3 - \lambda \cdot I_3| = 0$.

$$\left| \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 2(2-\lambda) = 0;$$

$$(2-\lambda)\,[(4-\lambda)(3-\lambda)-2] = (2-\lambda)(12-3\lambda-4\lambda+\lambda^2-2) = (2-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2-\lambda = 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} \rightarrow \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 2. \end{cases}$$

9. Dados los vectores $(m, -1, 0, 1)$, $(0, m, -1, 1)$ y $(1, 0, -1, 2)$ de R^4, determinar los valores de m para que dichos vectores sean linealmente independientes.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Para que los vectores sean linealmente independientes la igualdad

$$k_1(m,-1,0,1) + k_2(0,m,-1,1) + k_3(1,0,-1,2) = (0,0,0,0)$$

sólo debe cumplirse para $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

La igualdad anterior, función de los valores de m, equivale al siguiente sistema de ecuaciones en k_1, k_2 y k_3:

$$\begin{cases} mk_1 + k_3 = 0 \\ -k_1 + mk_2 = 0 \\ -k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -k_1 + mk_2 \quad 0, \\ -k_2 - k_3 = 0, \\ mk_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 0. \end{cases}$$

Se reduce el sistema a otro equivalente realizando en él las siguientes transformaciones sucesivas:

1) Se sustituye la tercera ecuación por la que resulta al sumarle la primera multiplicada por m.

2) En el sistema resultante se cambia la cuarta ecuación por la que se obtiene al sumarle la primera.

3) En el sistema obtenido se sustituye la tercera ecuación por la que se deduce al sumarle la segunda multiplicada por m^2.

4) En el sistema que resulta se cambia la cuarta ecuación por la que se obtiene al sumarle la segunda multiplicada por $m + 1$.

Se consiguen los siguientes sistemas equivalentes al primero:

$$\xrightarrow{1)} \begin{cases} -k_1 + mk_2 = 0 \\ -k_2 - k_3 = 0 \\ m^2k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{2)} \begin{cases} -k_1 + mk_2 = 0 \\ -k_2 - k_3 = 0 \\ m^2k_2 + k_3 = 0 \\ (m+1)k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{3)}$$

$$\xrightarrow{3)} \begin{cases} -k_1 + mk_2 = 0 \\ -k_2 - k_3 = 0 \\ (1-m^2)k_3 = 0 \\ (m+1)k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{4)} \begin{cases} -k_1 + mk_2 = 0, \\ -k_2 - k_3 = 0, \\ (1-m^2)k_3 = 0, \\ (1-m)k_3 = 0. \end{cases}$$

Considerando las ecuaciones tercera y cuarta del último sistema, se presentan los dos casos siguientes:

a) Si $m = 1$, cualquier valor de k_3 es solución de dichas ecuaciones y, por tanto, del sistema. Es decir, el sistema es compatible e indeterminado.

b) Si $m \neq 1$, las ecuaciones tercera y cuarta sólo admiten la solución $k_3 = 0$. El sistema se reduce a:

$$\begin{cases} -k_1 + mk_2 = 0, \\ -k_2 - k_3 = 0, \\ k_3 = 0, \end{cases}$$

que obviamente tiene como solución única $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

En definitiva, aplicando la definición de vectores linealmente independientes, se tiene que:

- Si $m \neq 1$, los vectores dados son linealmente independientes.
- Si $m = 1$, los vectores considerados son linealmente dependientes.

10. Dados los vectores $\mathbf{A} = (a, 8, 4)$, $\mathbf{B} = (-1, 2, 0)$ y $\mathbf{C} = (0, 1, 2)$, hallar a para que **A** se pueda expresar como combinación lineal de **B** y **C**:

$$\mathbf{A} = \alpha \cdot \mathbf{B} + \beta \cdot \mathbf{C} \ (\alpha, \beta \in R).$$

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

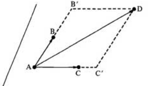
$$\mathbf{A} = \alpha \cdot \mathbf{B} + \beta \cdot \mathbf{C} \ \rightarrow \ (a,8,4) = \alpha(-1,2,0) + \beta(0,1,2) \ \rightarrow \ \begin{cases} -\alpha = a, \\ 2\alpha + \beta = 8, \\ 2\beta = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 8 \\ 2\beta = 4 \end{cases} \rightarrow \ \beta = 2, \ \alpha = \frac{8 - \beta}{2} = \frac{8 - 2}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

La solución debe satisfacer la primera ecuación; por tanto, $a = -\alpha = -3$.

11. Si A, B, C y D son puntos coplanarios no alineados, ¿cuál es el rango del sistema de vectores **AB**, **AC** y **AD**? Justifica la respuesta. ¿Qué valor toma el determinante asociado a la matriz que comparece en el sistema anterior?

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)



Como los puntos son coplanarios y no alineados, se presenta una situación como la representada en la figura adjunta.

Los vectores **AB** y **AC** son linealmente independientes, ya que los puntos A, B y C no están alineados y, por tanto, las direcciones de **AB** y **AC** son diferentes y no existe ningún escalar k tal que $\mathbf{AB} = k \cdot \mathbf{AC}$.

El vector **AD** es combinación lineal de los vectores **AB** y **AC**. En efecto, proyectando el punto D sobre la recta AB, según la dirección **AC**, se obtiene el punto B′ y, proyectándolo sobre la recta AC, según la dirección **AB**, se obtiene el punto C′. De acuerdo con la definición de adición de vectores, se tiene:

$$\mathbf{AD} = \mathbf{AB}' + \mathbf{AC}'.$$

Pero como **AB′** tiene la misma dirección que **AB** y **AC′** la misma dirección que **AC**, existen escalares α y β tales que $\mathbf{AB}' = \alpha \cdot \mathbf{AB}$ y $\mathbf{AC}' = \beta \cdot \mathbf{AC}$; por tanto, se deduce que:

$$\mathbf{AD} = \alpha \cdot \mathbf{AB} + \beta \cdot \mathbf{AC}.$$

Es decir, el valor del determinante asociado a la matriz del sistema de los vectores **AB**, **AC** y **AD** es cero, ya que existe un vector (el **AD**) que depende linealmente de los otros dos (los vectores **AB** y **AC**).

12. Dados los vectores $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{w} = (1, -1, 1)$:

a) ¿Son **v** y **w** linealmente independientes?

b) Escribir un vector **u**, tal que los vectores **u**, **v** y **w** sean linealmente independientes.

c) Escribir un vector **m**, tal que los vectores **m**, **v** y **w** sean linealmente dependientes.

(Propuesto en la UNED.)

a) Para que los vectores **v** y **w** sean linealmente independientes la igualdad

$$k_1 \cdot \mathbf{v} + k_2 \cdot \mathbf{w} = k_1(1,2,3) + k_2(1,-1,1) = (0,0,0)$$

solamente ha de cumplirse para $k_1 = k_2 = 0$.

La igualdad anterior equivale al siguiente sistema de ecuaciones en k_1 y k_2:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0, \\ 2k_1 - k_2 = 0, \\ 3k_1 + k_2 = 0. \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones primera y segunda se obtiene la ecuación $3k_1 = 0$. De ella se deduce que $k_1 = 0$ y, sustituyendo el valor de k_1 en la primera ecuación, se obtiene que $k_2 = 0$.

Como la única solución del sistema es $k_1 = k_2 = 0$, los vectores **v** y **w** son linealmente independientes.

b) Sea el vector $\mathbf{u}(u_1,u_2,u_3)$. Para que los vectores **u**, **v** y **w** sean linealmente independientes ha de cumplirse que el det. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0$. Es decir:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow u_1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - u_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + u_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Por tanto, $u_1(2 + 3) - u_2(1 - 3) + u_3(-1 - 2) \neq 0 \rightarrow 5u_1 + 2u_2 - 3u_3 \neq 0$.

Por ejemplo, el vector pedido puede ser $\mathbf{u}(1,1,1)$, ya que $5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 4 \neq 0$.

c) Sea el vector $\mathbf{m}(m_1,m_2,m_3)$. Para que los vectores **m**, **v** y **w** sean linealmente dependientes se ha de cumplir que el det. $(\mathbf{m},\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$. Es decir:

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow m_1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - m_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + m_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Por consiguiente, $m_1(2 + 3) - m_2(1 - 3) + m_3(-1 - 2) = 0 \rightarrow 5m_1 + 2m_2 - 3m_3 = 0$.

Por ejemplo, el vector buscado puede ser $\mathbf{m}(1,-1,1)$, ya que $5 \cdot 1 + 2(-1) - 3 \cdot 1 = 0$.

13. Estudiar la dimensión del subespacio vectorial engendrado por el conjunto de vectores (3, 1, 2, 1), (1, 1, 4, a) y (5, b, 0, c), para los distintos valores de a, b y c.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

La dimensión del subespacio vectorial engendrado por los vectores dados es el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & a \\ 5 & b & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$ (existe un menor de orden 2 distinto de cero), el rango de la matriz A es en cualquier caso mayor o igual que 2. Para que el rango de dicha matriz sea 2 todos los menores de orden 3 han de ser cero. Es decir:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & b & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 5 & b & c \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & a \\ 5 & 0 & c \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & a \\ b & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando los determinantes, se obtiene:

$$\begin{cases} 0 + 20 + 2b - 10 - 12b - 0 = 0 \\ 3c + 5a + b - 5 - 3ab - c = 0 \\ 12c + 10a + 0 - 20 - 0 - 2c = 0 \\ 4c + 2ab + 0 - 4b - 0 - 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -10b + 10 = 0 \\ 5a - 3ab + b + 2c - 5 = 0 \\ 10a + 10c - 20 = 0 \\ 2ab - 4b + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -b + 1 = 0, \\ 5a - 3ab + b + 2c - 5 = 0, \\ a + c - 2 = 0, \\ ab - 2b + c = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación se deduce b = 1 y, sustituyendo el valor de b en las restantes ecuaciones, se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} b = 1 \\ 5a - 3a + 1 + 2c - 5 = 0 \\ a + c - 2 = 0 \\ a - 2 + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 2a + 2c - 4 = 0 \\ a + c - 2 = 0 \\ a + c - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a + c - 2 = 0 \\ a + c - 2 = 0 \\ a + c - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 1, \\ a + c - 2 = 0. \end{cases}$$

Así pues, la dimensión del subespacio vectorial engendrado por los vectores dados es 2 si y sólo si b = 1 y si a + c = 2; en cualquier otro caso la dimensión es 3.

14. Sea V el espacio vectorial sobre el cuerpo Q de los números racionales de los polinomios de grado menor que 3, de una variable x. Comprobar si el vector $\mathbf{v} = 4 - 7x - x^2$ es combinación lineal de los vectores

$$\mathbf{a} = 2 - x + x^2, \ \mathbf{b} = \frac{1}{2} - x^2 \text{ y } \mathbf{c} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2.$$

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Si el vector **v** es combinación lineal de los vectores **a, b** y **c**, deben existir escalares α, β y γ (números racionales) tales que $\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c}$.

Es decir, $4 - 7x - x^2 = \alpha(2 - x + x^2) + \beta\left(\frac{1}{2} - x^2\right) + \gamma\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2\right)$.

Identificando los coeficientes de los términos del mismo grado, se obtiene el sistema:

$$\left\{\begin{aligned} 2\alpha + \frac{1}{2}\beta \quad &= 4 \\ -\alpha + \quad \frac{1}{2}\gamma &= -7 \\ \alpha - \beta + \frac{1}{4}\gamma &= -1 \end{aligned}\right. \rightarrow \left\{\begin{aligned} 4\alpha + \beta \quad &= 8, \\ -2\alpha + \quad \gamma &= -14, \\ 4\alpha - 4\beta + \gamma &= -4. \end{aligned}\right.$$

Resolviendo el sistema por reducción (multiplicando la primera ecuación por 4, restando la segunda de la tercera y sumando ambas), se tiene:

$$\left.\begin{aligned} 16\alpha + 4\beta &= 32 \\ 6\alpha - 4\beta &= 10 \end{aligned}\right\} \rightarrow 22\alpha = 42 \rightarrow \alpha = \frac{42}{22} = \frac{21}{11}.$$

Sustituyendo el valor de α en las ecuaciones primera y segunda del sistema original, se obtienen, respectivamente, los valores de β y γ:

$$\beta = 8 - 4\alpha = 8 - \frac{84}{11} = \frac{88 - 84}{11} = \frac{4}{11};$$

$$\gamma = -14 + 2\alpha = -14 + \frac{42}{11} = \frac{-154 + 42}{11} = -\frac{112}{11}.$$

Como $\frac{21}{11} \in Q$, $\frac{4}{11} \in Q$ y $-\frac{112}{11} \in Q$, el vector **v** es combinación lineal de los vectores **a**, **b** y **c**.

Así pues, $\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c} \rightarrow$

$$\rightarrow\ 4 - 7x - x^2 = \frac{21}{11}(2 - x + x^2) + \frac{4}{11}\left(\frac{1}{2} - x^2\right) - \frac{112}{11}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2\right).$$

15. Determinar los valores de a y b para que el vector (1, 4, a, b) esté en el subespacio engendrado por los vectores (1, 2, –1, 2) y (0, 1, 2, 1).

(Propuesto en la Univ. de Zaragoza.)

Para que el vector (1,4,a,b) esté en el subespacio engendrado por los vectores (1,2,–1,2) y (0,1,2,1) tiene que ser combinación lineal de ambos. Es decir, existen escalares α y β tales que

$$(1,4,a,b) = \alpha(1,2,-1,2) + \beta(0,1,2,1).$$

La igualdad anterior equivale al siguiente sistema de ecuaciones en α y β:

$$\begin{cases} \alpha = 1, \\ 2\alpha + \beta = 4, \\ -\alpha + 2\beta = a, \\ 2\alpha + \beta = b. \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones determinan los valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 4 - 2\alpha = 4 - 2 = 2$.

Sustituyendo dichos valores en las ecuaciones tercera y cuarta, se obtienen, respectivamente, los valores de a y b:

$$a = -\alpha + 2\beta = -1 + 4 = 3; \quad b = 2\alpha + \beta = 2 + 2 = 4.$$

16. Hallar el rango de los siguientes sistemas de vectores:

a) (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 4, 5) y (2, 4, 6);

b) (1, 2), (2, 3) y (0, 1).

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Nota: Para un conjunto de vectores, $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p\}$, de un espacio vectorial V sobre un cuerpo (R, por ejemplo), a todo vector de la forma

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_p\mathbf{a}_p,$$

siendo $\alpha_1 \in R$, $\alpha_2 \in R$, ..., $\alpha_p \in R$, se le dice **vector engendrado** por los vectores de A. Y también se dice que A es **sistema generador** de **v**. Los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ son las *coordenadas de* **v** *respecto de* A.

a) El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ es 3, ya que existe un menor de orden 3 (el mayor orden posible de un menor en la matriz dada) distinto de cero.

En efecto, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 6 + 24 - 27 - 4 - 20 = -6 \neq 0.$

b) El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es 2, porque existe un menor de orden 2 (el mayor orden posible de un menor en la matriz dada) distinto de cero.

En efecto, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0.$

TEMA I-3.2. —————— Matriz inversa

Ejercicios resueltos

1. *Probar la unicidad de la matriz inversa de una matriz regular* A_n.

Sean, de partida, dos matrices inversas de A_n: A_n^{-1} y B_n.

Por la definición (4), al ser A_n^{-1} inversa de A_n:

$$A_n \cdot A_n^{-1} = I_n \text{ y } A_n^{-1} \cdot A_n = I_n.$$

Igualmente, al ser B_n inversa de A_n: $A_n \cdot B_n = I_n$ y $B_n \cdot A_n = I_n$.

Multiplicando a la derecha por A_n^{-1}: $(B_n \cdot A_n) \cdot A_n^{-1} = I_n \cdot A_n^{-1}$.

Por la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices: $B_n \cdot (A_n \cdot A_n^{-1}) = I_n \cdot A_n^{-1}$.

Por la definición de matriz inversa: $B_n \cdot I_n = I_n \cdot A_n^{-1}$.

Por la propiedad de matriz unidad: $B_n = A_n^{-1}$.

Luego, ambas supuestas matrices inversas coinciden, lo que indica que sólo existe una matriz inversa.

2. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ *averiguar para qué valores del parámetro la matriz no tiene inversa.*

(Propuesto en la Univ. de Santander.)

Que no tenga matriz inversa supone que la matriz sea *singular*, es decir que: $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0;$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Se halla el determinante $|A|$ de la matriz aplicando la regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 4 + 0 - 1 - 0 = 1 \neq 0.$$

Como $|A| \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1}.

Para calcularla se hallan primeramente los adjuntos de cada uno de los elementos de la matriz A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

La matriz inversa A^{-1} es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Comprobar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ son inversas una de otra.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Se tiene que cumplir la definición de matriz inversa, $A \cdot B = B \cdot A = I$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+1 \\ 2-2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \bullet\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 2-2 \\ -1+1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow A \cdot B = B \cdot A = I \rightarrow \begin{cases} A = B^{-1}, \\ B = A^{-1}. \end{cases}$$

Por tanto, las matrices A y B son inversas la una de la otra.

3. Determinar la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Al ser una matriz diagonal su determinante es $|A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \neq 0$.

Como $|A| \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1}.

Los adjuntos de cada uno de los elementos de la matriz A son:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6;$$

todos los demás adjuntos son iguales a cero, ya que todos los elementos de una fila (y de una columna) son cero (propiedad 3 de los determinantes).

La matriz inversa A^{-1} es:

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

b) Al ser una matriz triangular (inferior) su determinante es $|B| = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 48 \neq 0$.

Como $|B| \neq 0$, existe la matriz inversa B^{-1}.

Los adjuntos de cada uno de los elementos de la matriz B son:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 24; \qquad B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -12;$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \qquad B_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0; \qquad B_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 24;$$

$$B_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -16; \qquad B_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0; \qquad B_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$B_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 16; \qquad B_{34} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12;$$

$$B_{41} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad B_{42} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$B_{43} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad B_{44} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

La matriz inversa B^{-1} es:

$$B^{-1} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

4. Probar que la matriz inversa de I_3 es I_3.

Ha de cumplirse la definición de matriz inversa, $I_3 \cdot I_3 = I_3$.

$$I_3 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$I_3 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow I_3^{-1} = I_3.$$

La matriz inversa de una matriz unidad es la misma matriz unidad.

5. Hallar para qué valor (o valores) de x admiten matriz inversa las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La condición necesaria y suficiente para que exista la matriz inversa A^{-1} de una matriz dada A es que el determinante $|A|$ de la matriz sea distinto de cero.

Se hallan los valores de x que hacen cero el determinante de la matriz. Existe matriz inversa para todos los valores de x, excepto para los valores hallados.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 - x^2 + 0 - 1 - 0 = -x^2 + 5 = 0;\ x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}.$

Por tanto, existe la matriz inversa para todos los valores de $x \neq \pm\sqrt{5}$.

b) $\begin{vmatrix} 3 & x & x \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9 \neq 0.$

Por consiguiente, existe la matriz inversa para todos los valores de x.

6. Comprobar para una matriz de orden 3 que, si es simétrica, su inversa, si existe, también lo es.

Sea la matriz cuadrada A_3 (de orden 3); como es simétrica, es igual a su traspuesta: $A_3 = A_3'$.

Si el determinante $|A_3| \neq 0$, existe la matriz inversa A_3^{-1} y se cumple: $A_3 \cdot A_3^{-1} = I_3$.

- Trasponiendo los dos miembros de la última igualdad: $(A_3 \cdot A_3^{-1})' = I_3'$.
- Por las propiedades de la trasposición de matrices: $(A_3^{-1})' \cdot A_3' = I_3$.

Nota: La matriz traspuesta de una multiplicación de matrices se obtiene multiplicando en orden inverso las matrices traspuestas de los factores; es decir, $(A_3 \cdot A_3^{-1})' = (A_3^{-1})' \cdot A_3'$. La traspuesta de una matriz unidad es la misma matriz unidad; por tanto, $I_3' = I_3$.

- Por la hipótesis del ejercicio $(A_3 = A_3')$: $(A_3^{-1})' \cdot A_3 = I_3$.
- Multiplicando por la derecha por A_3^{-1} : $[(A_3^{-1})' \cdot A_3] \cdot A_3^{-1} = I_3 \cdot A_3^{-1}$.
- Por la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices: $(A_3^{-1})' \cdot (A_3 \cdot A_3^{-1}) = I_3 \cdot A_3^{-1}$.
- Por la definición de matriz inversa: $(A_3^{-1})' \cdot I_3 = I_3 \cdot A_3^{-1}$.
- Por la definición de matriz unidad: $(A_3^{-1})' = A_3^{-1}$.

Como $A_3^{-1} = (A_3^{-1})'$, resulta que la matriz inversa es igual a su traspuesta y, por tanto, que la matriz inversa (si existe) de una matriz simétrica es también simétrica.

Ejemplo:

Sea la matriz simétrica $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; su matriz inversa $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ también es simétrica.

7. Probar que la matriz inversa de la matriz diagonal de elementos $k_1, k_2, \dots, k_n$ es la matriz diagonal de elementos $k_1^{-1}, k_2^{-1}, \dots, k_n^{-1}$.

Al ser A_n una matriz diagonal son cero todos los elementos que no están en la diagonal principal ($a_{ij} = 0, \forall i \neq j$).

El valor de su determinante es, por tanto, $|A_n| = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{i-1} \cdot k_i \cdot k_{i+1} \cdot \dots \cdot k_n \neq 0$.

Como $|A_n| \neq 0$, existe la matriz inversa A_n^{-1}.

Los adjuntos A_{ii} de los elementos de la diagonal principal, todos ellos con signo más, puesto que $(-1)^{i+i} = (-1)^{2i} = +1$, son determinantes de orden $n - 1$ de matrices diagonales, obtenidas al eliminar la fila y la columna a las que pertenece el elemento cuyo adjunto se calcula. En la diagonal principal de tales determinantes falta, precisamente, dicho elemento. Es decir:

$$A_{ii} = + k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{i-1} \cdot k_{i+1} \cdot \dots \cdot k_n.$$

Todos los restantes adjuntos (los de los elementos que no pertenecen a la diagonal principal) son iguales a cero, ya que todos los elementos de una fila (y de una columna) son cero (propiedad **3** de los determinantes).

Por tanto, la matriz inversa es también una matriz diagonal cuyos elementos son:

$$\frac{A_{ii}}{|A_n|} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{i-1} \cdot k_{i+1} \cdot \dots \cdot k_n}{k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{i-1} \cdot k_i \cdot k_{i+1} \cdot \dots \cdot k_n} = \frac{1}{k_i} = k_i^{-1}.$$

Es decir, la matriz inversa de $A_n = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}$ es $A_n^{-1} = \begin{pmatrix} k_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n^{-1} \end{pmatrix}$.

Se podría probar más fácilmente la proposición comprobando que $A_n \cdot A_n^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_n = I$. En efecto:

- $$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n^{-1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} k_1 \cdot k_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 \cdot k_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \cdot k_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

- $$\begin{pmatrix} k_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} k_1^{-1} \cdot k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2^{-1} \cdot k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n^{-1} \cdot k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Enunciar y demostrar la condición necesaria y suficiente para que una matriz 3×3 tenga inversa.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Enunciado

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada (en este caso de orden 3) tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

Demostración

- *Condición necesaria* (si una matriz tiene inversa, su determinante es distinto de cero):

  Sea la matriz A_3 cuya inversa es A_3^{-1}, de modo que $A_3 \cdot A_3^{-1} = A_3^{-1} \cdot A_3 = I_3$.

  Como el determinante de una multiplicación de matrices es igual a la multiplicación de los determinantes de los factores, se tiene:

  $$|A_3 \cdot A_3^{-1}| = |A_3| \cdot |A_3^{-1}| = |I_3| = 1 \neq 0; \quad |A_3^{-1} \cdot A_3| = |A_3^{-1}| \cdot |A_3| = |I_3| = 1 \neq 0.$$

  Si el producto de dos números reales es distinto de cero, ambos son distintos de cero. Por tanto, $|A_3| \neq 0$ y $|A_3^{-1}| \neq 0$.

  Como $|A_3| \neq 0$, queda demostrada la condición necesaria.

- *Condición suficiente* (si el determinante de una matriz es distinto de cero, la matriz tiene inversa):

  Sea la matriz A_3 tal que $|A_3| \neq 0$; en tal caso se puede calcular una matriz

  $$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A_3|} & \frac{A_{21}}{|A_3|} & \frac{A_{31}}{|A_3|} \\ \frac{A_{12}}{|A_3|} & \frac{A_{22}}{|A_3|} & \frac{A_{32}}{|A_3|} \\ \frac{A_{13}}{|A_3|} & \frac{A_{23}}{|A_3|} & \frac{A_{33}}{|A_3|} \end{pmatrix}$$

  tal que $A_3 \cdot A_3^{-1} = A_3^{-1} \cdot A_3 = I_3$.

  Como existe la matriz inversa A_3^{-1}, queda demostrada la condición suficiente.

9. Enunciar la condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa. Estudiar si son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) las matrices A y B tienen inversa;

b) AB tiene inversa.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Enunciado

La condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

Tal condición implica que la matriz ha de ser cuadrada, ya que es el único tipo de matrices que lleva asociado determinante.

1) Que las matrices A y B tengan inversa supone que sus determinantes $|A|$ y $|B|$ son distintos de cero.

   Como $|AB| = |A| \cdot |B| \neq 0$, por tratarse del producto de dos factores distintos de cero, la matriz AB tiene inversa.

   Es decir, la afirmación *a)* implica la *b)*.

2) Que la matriz AB tenga inversa supone que su determinante $|AB|$ es distinto de cero y, por tanto, que la matriz AB es cuadrada.

Ahora bien, la matriz cuadrada AB es el producto de las matrices A y B, que pueden ser, o no, matrices cuadradas.

- Si las matrices A y B son cuadradadas, $|AB| = |A| \cdot |B| \neq 0$; es decir, $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$, ya que al ser el producto distinto de cero los factores han de ser distintos de cero. Por tanto, existen las matrices A^{-1} y B^{-1}, inversas de las matrices A y B.

  En este caso la afirmación *b)* implica la *a)*.

- Si las matrices A y B no son cuadradas, no tiene sentido hablar de sus matrices inversas (sólo las matrices cuadradas tienen inversa).

  En este caso la afirmación *b)* no implica la *a)*.

10. Resolver la ecuación de matrices $A \cdot X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1} de la matriz A.

- Premultiplicando por A^{-1} los dos miembros de la ecuación: $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$.
- Por la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices: $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$.
- Por la definición de matriz inversa: $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$.
- Por la propiedad de matriz unidad: $X = A^{-1} \cdot B$.

Para calcular la matriz inversa A^{-1} se hallan los adjuntos de cada uno de los elementos de la matriz A:

$$A_{11} = 2; \quad A_{12} = -1; \quad A_{21} = -3; \quad A_{22} = 2.$$

La matriz inversa es $A^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-6 & 2+15 \\ -3+4 & -1-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$.

11. Resolver la ecuación matricial $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Efectuando la multiplicación, se tiene: $\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

De la igualdad de matrices se obtiene el sistema $\begin{cases} ax + by = e, \\ cx + dy = f. \end{cases}$

Utilizando el método de reducción para resolver el sistema, se deduce:

$$\begin{cases} adx + bdy = de \\ -bcx - bdy = -bf \end{cases} \rightarrow x(ad - bc) = de - bf \rightarrow x = \frac{de - bf}{ad - bc};$$

$$\begin{cases} -acx - bcy = -ce \\ acx + ady = af \end{cases} \rightarrow y(ad - bc) = af - ce \rightarrow y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

La ecuación tiene solución sólo si $ad - bc \neq 0$; es decir, si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, lo que indica que la ecuación tiene solución sólo si existe la matriz inversa de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

12. Resolver la ecuación matricial $X \cdot A = B + C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1} de la matriz A.

- Posmultiplicando por A^{-1} los dos miembros de la ecuación: $X \cdot A \cdot A^{-1} = (B + C) \cdot A^{-1}$.
- Por la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices: $X \cdot (A \cdot A^{-1}) = (B + C) \cdot A^{-1}$.
- Por la definición de matriz inversa: $X \cdot I = (B + C) \cdot A^{-1}$.
- Por la propiedad de matriz unidad: $X = (B + C) \cdot A^{-1}$.

Se calcula la matriz inversa A^{-1} de la matriz A. Los adjuntos de los elementos son:

$$A_{11} = 2; \quad A_{12} = -1; \quad A_{21} = -1; \quad A_{22} = 1.$$

La matriz inversa es $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$X = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+1 \\ 2-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Resolver la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Efectuando la multiplicación, se tiene: $\begin{pmatrix} az \\ by \\ cx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$.

De la igualdad de matrices se deduce el sistema $az = d$, $by = e$, $cx = f$.

La solución del sistema es $x = \frac{f}{c}$, $y = \frac{e}{b}$ y $z = \frac{d}{a}$.

Por tanto, la ecuación tiene solución sólo si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$, lo que indica que el determinante $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -abc$ es distinto de cero: es decir, la ecuación tiene solución sólo si existe la matriz inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14. Resolver la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$, siendo $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

- Sumando $-N$ a los dos miembros de la ecuación: $(M \cdot X + N) + (-N) = P + (-N)$.
- Por la propiedad asociativa de la adición de matrices: $M \cdot X + (N - N) = P - N$.
- Por la propiedad de matriz opuesta: $M \cdot X + 0 = P - N$.
- Por la propiedad de matriz cero: $M \cdot X = P - N$.

Como $|M| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa M^{-1} de la matriz M.

- Premultiplicando por M^{-1} los dos miembros de la última ecuación: $M^{-1} \cdot (M \cdot X) = M^{-1} \cdot (P - N)$.
- Por la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices: $(M^{-1} \cdot M) \cdot X = M^{-1} \cdot (P - N)$.
- Por la definición de matriz inversa: $I \cdot X = M^{-1} \cdot (P - N)$.
- Por la propiedad de matriz unidad: $X = M^{-1} \cdot (P - N)$.

Se calcula la matriz inversa M^{-1} de la matriz M. Los adjuntos de los elementos son:

$$M_{11} = -1; \quad M_{12} = 0; \quad M_{21} = 0; \quad M_{22} = -1.$$

La matriz inversa es $M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

$$X = \begin{pmatrix} -3 - 0 & -1 - 0 \\ 0 + 1 & 0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. Resolver la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1} de la matriz $A = I$ y es $A^{-1} = I$.

- Premultiplicando por $A^{-1} = I$ los dos miembros de la ecuación: $I \cdot (I \cdot X \cdot B) = I \cdot C$.
- Por la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices: $(I \cdot I) \cdot (X \cdot B) = I \cdot C$.
- Por la propiedad de matriz unidad: $I \cdot (X \cdot B) = C \rightarrow X \cdot B = C$.

Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa B^{-1} de la matriz B.

- Posmultiplicando por B^{-1} los dos miembros de la última ecuación: $(X \cdot B) \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1}$.
- Por la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices: $X \cdot (B \cdot B^{-1}) = C \cdot B^{-1}$.
- Por la definición de matriz inversa: $X \cdot I = C \cdot B^{-1}$.
- Por la propiedad de matriz unidad: $X = C \cdot B^{-1}$.

Se calcula la matriz inversa B^{-1} de la matriz B. Los adjuntos de los elementos son:

$$B_{11} = 2; \quad B_{12} = -1; \quad B_{21} = -1; \quad B_{22} = 1.$$

La matriz inversa es $B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Por consiguiente, $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 & -1 + 1 \\ 0 - 0 & -0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, obtener $(AB)^{-1}$ y $(BA)^{t}$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4 + 0 & 0 + 2 + 3 \\ 2 + 2 + 0 & 0 + 1 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Como $|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 50 - 20 = 30 \neq 0$, existe la matriz inversa $(A \cdot B)^{-1}$.

Los adjuntos de los elementos de la matriz $A \cdot B$ son:

$$(A \cdot B)_{11} = 10; \quad (A \cdot B)_{12} = -4; \quad (A \cdot B)_{21} = -5; \quad (A \cdot B)_{22} = 5.$$

La matriz inversa es $(A \cdot B)^{-1} = \dfrac{1}{30} \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{6} \\ -\dfrac{2}{15} & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}$.

2) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+0 & 1+0 \\ 2+2 & 4+1 & 2+3 \\ 0+6 & 0+3 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

La matriz traspuesta es $(B \cdot A)' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

TEMA I-4.1. —— Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas de Cramer

Ejercicios resueltos

1. *Hallar para qué valores de* m *es sistema de Cramer la familia de sistemas* $\left\{\begin{array}{l} my + z = 2 \\ mx - z = 1 \\ y + z = 0 \end{array}\right.$

Por la condición necesaria, para que el sistema sea de Cramer el determinante de la matriz de los coeficientes tiene que ser distinto de cero; luego:

$$\begin{vmatrix} 0 & m & 1 \\ m & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m - m^2 \neq 0 \rightarrow m(1-m) \neq 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq 0; \\ 1 - m \neq 0 \rightarrow m \neq 1. \end{array}\right.$$

Por tanto, para todo valor de m, excepto para m = 0 y m = 1, el sistema es de Cramer.

2. *Resolver el sistema* $\dfrac{3x+2y}{xy} = 4, \; \dfrac{-3x+4z}{xz} = 1, \; \dfrac{3y+4z}{yz} = 5.$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2y}{xy} + \dfrac{3x}{xy} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 4 \\ \dfrac{4z}{xz} - \dfrac{3x}{xz} = \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{z} = 1 \\ \dfrac{4z}{yz} + \dfrac{3y}{yz} = \dfrac{4}{y} + \dfrac{3}{z} = 5 \end{array}\right\}$$

Llamando:

$$\frac{1}{x} = u, \; \frac{1}{y} = v, \; \frac{1}{z} = w \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2u + 3v = 4 \\ 4u - 3w = 1 \\ 4v + 3w = 5 \end{array}\right.$$

(supuestos x, y, z distintos de cero).

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, es sistema de Cramer.

$$u = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}; \; v = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-12}{-12} = 1; \; w = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, $x = \dfrac{1}{u} = 2, \; y = \dfrac{1}{v} = 1, \; z = \dfrac{1}{w} = 3.$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Razonar si es compatible el sistema $\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{array}\right.$

El sistema es incompatible, ya que la suma de dos números, x + y, no puede ser a la vez 1 y 2 (por la propiedad uniforme de la adición).

2. Razonar si es compatible o no y si es determinado o no el sistema $\left\{\begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{array}\right.$

La segunda ecuación, $2x - 2y = 4$, es equivalente a $2(x - y) = 4 \rightarrow x - y = 2$; por tanto, dicha ecuación coincide con la primera. En realidad se trata de un sistema de una ecuación con dos incógnitas. Es, pues, un sistema compatible e indeterminado.

Haciendo $y = t$, se tiene $x = 2 + y = 2 + t$. Es decir, son soluciones $x = 2 + t$, $y = t$, $\forall t$.

3. Hallar la matriz adjunta de cada una de las matrices siguientes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Se hallan los adjuntos de cada uno de los elementos de la matriz A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

La matriz adjunta es $A^* = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 2 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Los adjuntos de los elementos de la matriz B son:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad B_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5;$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5; \quad B_{14} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -10;$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 14; \quad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4;$$

$$B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -17; \quad B_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -14; \quad B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 19;$$

$$B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad B_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$B_{41} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -7; \quad B_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8;$$

$$B_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad B_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

La matriz adjunta es $B^* = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -14 & -7 \\ 5 & -4 & 19 & -8 \\ -5 & -17 & 2 & 1 \\ -10 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Resolver por el método de la matriz inversa los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y = 0 \\ 2y = 2 \end{cases}$

La solución, por el método de la matriz inversa, de un sistema expresado en forma matricial es $X = A^{-1} \cdot B$, siendo X la matriz de las indeterminadas, A^{-1} la matriz inversa de la matriz de los coeficientes y B la matriz de los términos independientes.

a) Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1} de la matriz A.

Para calcularla se hallan los adjuntos de cada uno de los elementos de la matriz A:

$$A_{11} = -2; \quad A_{12} = -1; \quad A_{21} = 1; \quad A_{22} = 1.$$

La matriz inversa es $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Las soluciones del sistema son $x = 1$, $y = 1$.

b) Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2 + 0) = -2 \neq 0$, existe la matriz inversa B^{-1}.

Los adjuntos de los elementos de la matriz B son:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

La matriz inversa es $B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Por consiguiente:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 0 + 1 \\ 0 + 0 + 1 \\ -1 + 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones del sistema son $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

5. Resolver por la regla de Cramer los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 4z = 2 \\ 3x + 4y - z = -3 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

b) $\begin{cases} x + y + 3z = 10 \\ x - 2y - 2z = 5 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

a) Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 50 \neq 0$, el sistema es de Cramer.

$$A(x) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 20; \quad A(y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -60; \quad A(z) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -30.$$

$$x = \frac{A(x)}{|A|} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}; \qquad y = \frac{A(y)}{|A|} = \frac{-60}{50} = -\frac{6}{5}; \qquad z = \frac{A(z)}{|A|} = \frac{-30}{50} = -\frac{3}{5}.$$

Las soluciones del sistema son $x = \frac{2}{5}$, $y = -\frac{6}{5}$, $z = -\frac{3}{5}$.

b) Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, el sistema es de Cramer.

$$B(x) = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad B(y) = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -50; \quad B(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 35.$$

$$x = \frac{B(x)}{|B|} = \frac{-5}{5} = -1; \qquad y = \frac{B(y)}{|B|} = \frac{-50}{5} = -10; \qquad z = \frac{B(z)}{|B|} = \frac{35}{5} = 7.$$

Las soluciones del sistema son $x = -1$, $y = -10$, $z = 7$.

6. Hallar para qué valores de a son sistemas de Cramer los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ -ax + ay = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ (a+1)x + y - az = a \\ x + (a+1)y = 2a \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} (4-a)x - 5y + 7z = 0 \\ x - (4+a)y + 9z = 0 \\ -4x + (5-a)z = 0 \end{cases}$

Para que un sistema sea de Cramer el determinante de la matriz de los coeficientes de las indeterminadas ha de ser distinto de cero.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & a \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow a + a = 2a \neq 0 \rightarrow a \neq 0.$

El sistema es de Cramer para todo valor de $a \neq 0$.

b) $|B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow 0 - a + (a+1)(a+1) - 1 + a^2(a+1) - 0 \neq 0 \rightarrow$

$$\rightarrow -a + a^2 + 2a + 1 - 1 + a^3 + a^2 = a^3 + 2a^2 + a =$$
$$= a(a^2 + 2a + 1) = a(a + 1)(a + 1) \neq 0.$$

El sistema es de Cramer para todo valor de a, excepto para a = 0 y a = −1.

c) $|C| = \begin{vmatrix} 4-a & -5 & 7 \\ 1 & -(4+a) & 9 \\ -4 & 0 & 5-a \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$

$$\rightarrow -(4-a)(4+a)(5-a) + 180 + 0 - 28(4+a) - 0 + 5(5-a) \neq 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow -80 + 5a^2 + 16a - a^3 + 180 - 112 - 28a + 25 - 5a = -a^3 + 5a^2 - 17a + 13 \neq 0.$$

Para conocer los valores que hacen cero al polinomio se descompone éste en factores, aplicando la regla de Ruffini. Se prueban los divisores de 13 (1, −1, 13, −13):

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 5 & -17 & 13 \\ 1 & & -1 & 4 & -13 \\ \hline & -1 & 4 & -13 & 0 \end{array}$$

Es decir, $-a^3 + 5a^2 - 17a + 13 = (a - 1)(-a^2 + 4a - 13)$.

Los valores que hacen cero el polinomio son:

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ -a^2 + 4a - 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{-2} = \dfrac{4 \mp \sqrt{-36}}{2} \text{ (raíces imaginarias).} \end{cases}$$

El sistema es de Cramer para todo valor real de $a \neq 1$.

7. Resolver el sistema $\dfrac{xy}{5x + 4y} = 6$, $\dfrac{yz}{3y + 2z} = 6$, $\dfrac{xz}{3x + 2z} = 8$.

Haciendo operaciones en las ecuaciones del sistema, se obtiene:

$$\frac{xy}{5x+4y} = 6 \rightarrow \frac{5x+4y}{xy} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{4y}{xy} + \frac{5x}{xy} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{6};$$
$$\frac{yz}{3y+2z} = 6 \rightarrow \frac{3y+2z}{yz} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{2z}{yz} + \frac{3y}{yz} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{6};$$
$$\frac{xz}{3x+2z} = 8 \rightarrow \frac{3x+2z}{xz} = \frac{1}{8} \rightarrow \frac{2z}{xz} + \frac{3x}{xz} = \frac{1}{8} \rightarrow \frac{2}{x} + \frac{3}{z} = \frac{1}{8}.$$

Suponiendo que x, y, z son distintos de cero y haciendo $\dfrac{1}{x} = a$, $\dfrac{1}{y} = b$, $\dfrac{1}{z} = c$, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4a + 5b = \dfrac{1}{6}, \\ 2b + 3c = \dfrac{1}{6}, \\ 2a + 3c = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 54 \neq 0$, el sistema es de Cramer.

$$A(a) = \begin{vmatrix} \frac{1}{6} & 5 & 0 \\ \frac{1}{6} & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{8}; \quad A(b) = \begin{vmatrix} 4 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 3 \\ 2 & \frac{1}{8} & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}; \quad A(c) = \begin{vmatrix} 4 & 5 & \frac{1}{6} \\ 0 & 2 & \frac{1}{6} \\ 2 & 0 & \frac{1}{8} \end{vmatrix} = 2.$$

$$a = \frac{A(a)}{|A|} = \frac{1}{54} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{144}; \quad b = \frac{A(b)}{|A|} = \frac{1}{54} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{36};$$

$$c = \frac{A(c)}{|A|} = \frac{1}{54} \cdot 2 = \frac{1}{27}.$$

Por tanto, las soluciones son $x = \frac{1}{a} = 144$, $y = \frac{1}{b} = 36$, $z = \frac{1}{c} = 27$.

8. **Un móvil sube las cuestas a 54 km/h, las baja a 90 km/h y en línea horizontal marcha a 80 km/h. Para ir de A a B tarda 2 h 30 min y para volver de B a A, 2 h 38 min. ¿Cuál es la longitud del camino llano si entre A y B hay 192 km?**

Sean, respectivamente, x, y, z la suma de todos los trayectos cuesta arriba, en horizontal y cuesta abajo (al ir de A a B, ya que al volver de B a A la suma de los trayectos cuesta arriba es z y cuesta abajo es x), expresados todos ellos en kilómetros.

Al ir de A a B el móvil tarda 2 h 30 min $= \left(2 + \frac{30}{60}\right) h = \left(2 + \frac{1}{2}\right) h = \frac{4+1}{2} h = \frac{5}{2} h.$

Al volver de B a A tarda 2 h 38 min $= \left(2 + \frac{38}{60}\right) h = \frac{120 + 38}{60} h = \frac{158}{60} h = \frac{79}{30} h.$

El espacio total recorrido y los tiempos $\left(\text{tiempo} = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}}\right)$ empleados en recorrer los trayectos de ida y vuelta originan el siguiente sistema de ecuaciones en x, y, z:

$$\begin{cases} x + y + z = 192 \\ \frac{x}{54} + \frac{y}{80} + \frac{z}{90} = \frac{5}{2} \\ \frac{x}{90} + \frac{y}{80} + \frac{z}{54} = \frac{79}{30} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 192, \\ 40x + 27y + 24z = 5\,400, \\ 24x + 27y + 40z = 5\,688. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 27 & 24 \\ 24 & 27 & 40 \end{vmatrix} = 1\,080 + 576 + 1\,080 - 648 - 648 - 1\,600 = 2\,736 - 2\,896 = -160.$$

Como $|A| = -160 \neq 0$, el sistema es de Cramer.

La longitud del camino llano es $y = \frac{A(y)}{|A|}$.

$$A(y) = \begin{vmatrix} 1 & 192 & 1 \\ 40 & 5\,400 & 24 \\ 24 & 5\,688 & 40 \end{vmatrix} = 216\,000 + 110\,592 + 227\,520 - 129\,600 - 136\,512 - 307\,200;$$

$$A(y) = 554\,112 - 573\,312 = -19\,200.$$

La longitud del camino llano es $y = \frac{-19\,200}{-160} = 120$ km.

TEMA I-4.2. —— Estudio de un sistema lineal. Teorema de Rouché

Ejercicios resueltos

1. *Discutir según los valores de* a *el sistema* $\left\{ \begin{array}{l} ax - y = 1 \\ -2x + (a-1)y = 2 \end{array} \right.$

En este caso: $m = 2 = n$.

Se considera el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a & -1 \\ -2 & a-1 \end{vmatrix} = a(a-1) - 2 = a^2 - a - 2.$$

Dicha expresión *puede ser igual a cero o distinta de cero.*

Si es *igual a cero,* indica que para sus soluciones *el determinante es igual a cero,* por lo que *el rango es inferior a* 2.

Si es *distinta de cero,* señala que para sus soluciones *el determinante es distinto de cero,* es decir, que *el rango es* 2.

$$a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow a_1 = 2,\ a_2 = -1.$$

Si $a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow$ para $a = 2$ y $a = -1$ el rango es menor que 2; como $n = 2$, el sistema para dichos valores puede ser *compatible* e *indeterminado* (si $r = r^+ = 1$), o *incompatible* (si $r = 1 \neq 2 = r^+$); cuestión que habrá que diferenciar.

Si $a^2 - a - 2 \neq 0 \rightarrow$ para $a \neq 2$ y $a \neq -1$ el rango es igual a 2; como A es submatriz de A^+, $r^+ = 2$; y también $n = m = 2$. Son valores que hacen que el sistema sea *compatible* y *determinado.*

Para $a \neq 2$ y $a \neq -1$: es sistema compatible y determinado.

Para $a = 2$ el sistema es:

$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ -2x + y = 2 \end{array} \right\}$; $A^+ = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow r^+ = 2.$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $|2| = 2 \neq 0 \rightarrow r = 1.$

Para $a = 2$: $r = 1 \neq 2 = r^+$: es sistema incompatible.

Para $a = -1$ el sistema es:

$\left. \begin{array}{l} -x - y = 1 \\ -2x - 2y = 2 \end{array} \right\}$; $A^+ = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; como todos los menores de orden 2 son cero $\rightarrow r < 2$.

Como $|-1| = -1 \neq 0 \rightarrow r = r^+ = 1.$

Para $a = -1$: $r = r^+ = 1 \neq 2 = n$: es sistema compatible e indeterminado.

2. *Resolver los sistemas compatibles del ejercicio anterior.*

Para $a \neq 2$ y $a \neq -1$ son sistemas determinados. Por la regla de Cramer:

$$|A| = a^2 - a - 2; \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix}}{a^2 - a - 2} = \frac{a+1}{a^2 - a - 2}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{a^2 - a - 2} = \frac{2a+2}{a^2 - a - 2}.$$

Para $a = -1$, el sistema es indeterminado. Como en la determinación del rango no han intervenido la 2.ª ecuación y la indeterminada y, se elimina dicha ecuación y se considera como parámetro $y = t$:

$$-x - t = 1 \rightarrow x = -1 - t,\ y = t,\ \forall t.$$

3. *Calcular los valores de* a *que hacen que el sistema* $\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ ax - 2y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ x + 5y = a \end{array}\right.$ *tenga solución. Hallar la solución en dichos casos.*

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \\ 2 & a \\ 1 & 5 \end{pmatrix};\ \text{como} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \rightarrow r = 2.$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ a & -2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 5 & a \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema tenga solución la matriz A^+ tiene que tener rango 2; por tanto, todos los menores de orden 3 de A^+ deben ser cero; es decir:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ a & -2 & 1 \\ 2 & a & 2 \end{vmatrix} = 2a^2 - 2 = 2(a-1)(a+1) = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a - 1 = 0 \rightarrow a = 1; \\ a + 1 = 0 \rightarrow a = -1; \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ a & -2 & 1 \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix} = a^2 + 6a - 7 = (a-1)(a+7) = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a - 1 = 0 \rightarrow a = 1; \\ a + 7 = 0 \rightarrow a = -7; \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix} = a^3 - 7a + 6 = (a-1)(a-2)(a+3) = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a - 1 = 0 \rightarrow a = 1; \\ a - 2 = 0 \rightarrow a = 2; \\ a + 3 = 0 \rightarrow a = -3. \end{array}\right.$$

Para $a \neq 1$, $a \neq -1$, $a \neq -7$, $a \neq 2$ y $a \neq -3$, como $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

Para $a = 1$, $a = -1$, $a = -7$, $a = 2$ y $a = -3$, como $r = r^+ = n = 2$, el sistema es compatible y determinado.

Para $a = 1$: $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ x - 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \\ x + 5y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ x + 5y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = 1;\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = 0.$

Igualmente:

Para $a = -1$: $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ x + 5y = -1 \end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{9}{11},\ y = \dfrac{-4}{11}.$

Para $a = -7$: $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ x + 5y = -7 \end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{3}{11},\ y = \dfrac{-16}{11}.$

Para $a = 2$: $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ x + 5y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{12}{11},\ y = \dfrac{2}{11}.$

Para $a = -3$: $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ x + 5y = -3 \end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{7}{11},\ y = \dfrac{-8}{11}.$

Nota: En la determinación del rango de A no han entrado las filas 2.ª y 3.ª, por lo que se han suprimido (son combinación lineal de las filas 1.ª y 4.ª).

4. *Discutir el sistema* $\begin{pmatrix} 3-a & a & 1 \\ 0 & a & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ *y resolverlo en los casos de compatibilidad.*

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

$$\begin{vmatrix} 3-a & a & 1 \\ 0 & a & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 2a^3 - 5a^2 + 3a = 2a(a-1)\left(a - \frac{3}{2}\right).$$

Para $a = 0$, $a = 1$ y $a = \frac{3}{2}$ el determinante es cero $\to r < 3$.

Para $a = 0$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix}$;

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to r = 2.$$

Como A es submatriz de A^+ y $r = 2 \to r^+ = 2$, $\forall b$.

Para $a = 0$ y $\forall b$: $r = r^+ = 2 = n$: el sistema es compatible y determinado.

Resolución: $\left.\begin{matrix} 3x + z = 2 \\ z = b \end{matrix}\right\} \to 3x = 2 - b \to x = \dfrac{2-b}{3}$, $z = b$, $\forall b$.

Para $a = 1$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$; $A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to r = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = 2b - 2 = 0 \to b = 1 \to r^+ = 2.$$

Para $a = 1$ y $b = 1$: $r = r^+ = 2 \neq 3 = n$: el sistema es compatible e indeterminado.

Resolución: $\left.\begin{matrix} 2x + y + t = 2 \\ y + t = 0 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} 2x + y = 2 - t \\ y = -t \end{matrix}\right\}$ $2x - t = 2 - t \to x = 1$, $y = -t$, $z = t$, $\forall t$.
$z = t$

Para $a = 1$ y $b \neq 1$: $r = 2 \neq 3 = r^+$: el sistema es incompatible.

Para $a = \frac{3}{2}$:

$\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$, que equivale al sistema $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2b \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \to r = 2$; $A^+ = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 2b \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2b \end{vmatrix} = 0.$

En los tres casos se obtiene $b = 2$.

Para $a = \frac{3}{2}$ y $b = 2$: $r = r^+ = 2 \neq 3 = n$: el sistema es compatible e indeterminado.

Resolución: $\left.\begin{matrix} 3x + 3y + 2t = 4 \\ 3y + 3t = 0 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} 3x - 3t + 2t = 4 \\ y = -t \end{matrix}\right\} \to x = \dfrac{4+t}{3}$, $y = -t$, $z = t$, $\forall t$.
$z = t$

Para $a = \frac{3}{2}$ y $b \neq 2$: $r = 2 \neq 3 = r^+$: el sistema es incompatible.

Por último, para $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq \frac{3}{2}$: $r = 3 = r^+$: el sistema es compatible y determinado.

Resolución: Para cualquier valor de b y para valores de a distintos de 0, 1 y $\frac{3}{2}$:

$$\begin{vmatrix} 3-a & a & 1 \\ 0 & a & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 2a^3 - 5a^2 + 3a = 2a(a-1)\left(a - \frac{3}{2}\right) = a(a-1)(2a-3).$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a & a \\ b & a & 1 \end{vmatrix}}{a(a-1)(2a-3)} = \frac{ab - 2a - b + 2}{(a-1)(2a-3)};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3-a & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \\ a & b & 1 \end{vmatrix}}{a(a-1)(2a-3)} = \frac{ab + 2a - 3b}{(a-1)(2a-3)};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3-a & a & 2 \\ 0 & a & 0 \\ a & a & b \end{vmatrix}}{a(a-1)(2a-3)} = \frac{-ab - 2a + 3b}{(a-1)(2a-3)}.$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Discutir y resolver los sistemas siguientes en los casos de compatibilidad:

a) $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2y = 1 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

b) $\begin{cases} ax + y + 3z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ 5x - 3y - 2z = 6 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

c) $\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

d) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. de León.)

e) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - az = 2 \\ x + y + az = 10 \end{cases}$

f) $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ (a + 1)x + y - az = a \\ x + (a + 1)y = 2a \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

g) $\begin{cases} 5x + 2y - z = 9 \\ 2x - 4y + 8z = a \\ x - 2y + 4z = 2 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

h) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ (a + 1)x + y - az = 0 \\ 2x + y - z = 1 - a \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

j) $\begin{cases} x - 2z = 3 \\ 4x + y = 5 \\ 2y + z = a \\ 2x - 3z = a \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3x - ay + 3z = 4 \\ ax + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ ax + 4y - z = 5 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

l) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ x + y - az = 3 \\ ax + 2y + (a + 2)z = a^2 - 2 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

m) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z + u = -3 \\ x - 2y + z - u = 5 \\ x - 4y + 6z + 2u = 10 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

n) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ ax - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

o) $\begin{cases} y = x \\ x + y = 0 \\ ax + by = 0 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

p) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x + y + az = b \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

q) $\begin{cases} 3x + 7y = a \\ x + y = b \\ 5x - 13y = 5a - 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

a) **Discusión:**

Se trata de una familia de sistemas, que dependen del parámetro a, con $m = 2$ ecuaciones y $n = 2$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se considera el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1).$$

(Se ha descompuesto en factores el binomio $a^3 - 1$ utilizando la regla de Ruffini.)

Los valores de a que hacen cero el determinante $|A|$ son:

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ a^2 + a + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \text{ (raíces imaginarias).} \end{cases}$$

El único valor real de a que hace cero el determinante $|A|$ es $a = 1$; para todo valor real de $a \neq 1$ el valor del determinante $|A|$ es distinto de cero. Por consiguiente, se pueden considerar dos casos:

1) Para $a = 1$ el rango de la matriz A es $r = 1$.

   Como la matriz ampliada es $A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, todos los menores de orden 2 son cero; el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 1$.

   De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 1 < 2 = n$, el sistema es compatible e indeterminado.

2) Para todo valor real de $a \neq 1$ el rango de la matriz A es $r = 2$.

   Como $A = A_2$ es submatriz de $A^+ = A^+_{2,3}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

   Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 = n$, los sistemas son compatibles y determinados.

Resolución:

1) Para a = 1 se tiene el sistema particular $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow x + y = 1.$

Considerando como parámetro y, y = t: $x = 1 - y = 1 - t.$

Las soluciones son $x = 1 - t$, $y = t$, para todo valor real de t.

2) Para todo valor real de $a \neq 1$ se tiene la familia de sistemas:

$$\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -ax - y = -a^2 \\ ax + a^3y = a \end{cases} \rightarrow a^3y - y = a - a^2 \rightarrow (a^3 - 1)y = a(1 - a) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a(1 - a)}{a^3 - 1} = \dfrac{-a(a - 1)}{(a - 1)(a^2 + a + 1)} = -\dfrac{a}{a^2 + a + 1}, \\ x = 1 - a^2y = 1 + \dfrac{a^3}{a^2 + a + 1} = \dfrac{a^3 + a^2 + a + 1}{a^2 + a + 1}. \end{cases}$$

Las soluciones son $x = \dfrac{a^3 + a^2 + a + 1}{a^2 + a + 1}$, $y = -\dfrac{a}{a^2 + a + 1}$, para todo valor real de $a \neq 1$.

b) **Discusión:**

Es una familia de sistemas, dependientes del parámetro a, con m = 3 ecuaciones y n = 3 incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se analiza el determinante |A| de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2a - 5 - 9 + 15 - 3a + 2 = 3 - a.$$

Para a = 3 el determinante |A| es cero; para todo valor real de $a \neq 3$ el determinante |A| es distinto de cero. Por tanto, se pueden considerar dos casos:

1) Para a = 3 el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0$, el rango de la matriz A es r = 2.

Al ser $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -18 + 0 - 9 + 15 + 0 - 6 = -18 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

2) Para todo valor real de $a \neq 3$ el rango de la matriz A es r = 3.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados.

Resolución:

1) Para $a = 3$ el sistema no tiene solución, por ser incompatible.

2) Para todo valor real de $a \neq 3$ se resuelve por la regla de Cramer (obsérvese que $|A| \neq 0$):

$$A(x) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 9; \quad A(y) = \begin{vmatrix} a & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 6a + 9; \quad A(z) = \begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -6a.$$

$$x = \frac{A(x)}{|A|} = \frac{9}{3-a}; \qquad y = \frac{A(y)}{|A|} = \frac{6a+9}{3-a}; \qquad z = \frac{A(z)}{|A|} = \frac{-6a}{3-a}.$$

Las soluciones son $x = \dfrac{9}{3-a}$, $y = \dfrac{6a+9}{3-a}$, $z = -\dfrac{6a}{3-a}$, para todo valor real de $a \neq 3$.

c) **Discusión:**

Se trata de una familia de sistemas, dependientes del parámetro a, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2a + 1 - 3 + 2 - 3a + 1 = 1 - 5a.$$

Para $a = \dfrac{1}{5}$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq \dfrac{1}{5}$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por consiguiente, se pueden considerar dos casos:

1) Para $a = \dfrac{1}{5}$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

   En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Al ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

   Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 - 2 - 3 + 2 + 0 = -9 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

   En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

2) Para todo valor real de $a \neq \dfrac{1}{5}$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

   Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

   De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados.

Resolución:

1) Para $a = \frac{1}{5}$ el sistema no tiene solución, porque es incompatible.

2) Para todo valor real de $a \neq \frac{1}{5}$ se resuelve por la regla de Cramer ($|A| \neq 0$):

$$A(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -9; \quad A(y) = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 2a; \quad A(z) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 6a.$$

$$x = \frac{A(x)}{|A|} = \frac{-9}{1 - 5a}; \qquad y = \frac{A(y)}{|A|} = \frac{4 - 2a}{1 - 5a}; \qquad z = \frac{A(z)}{|A|} = \frac{3 - 6a}{1 - 5a}.$$

Las soluciones son $x = -\frac{9}{1 - 5a}$, $y = \frac{4 - 2a}{1 - 5a}$, $z = \frac{3 - 6a}{1 - 5a}$, para todo valor real de $a \neq \frac{1}{5}$.

d) **Discusión:**

Es una familia de sistemas, dependientes del parámetro a, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ a & -1 & -1 & a - 1 \\ 3 & 0 & -2a & a - 1 \end{pmatrix}.$$

Se analiza el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix} = 4a - 3 - 0 - 3 + 0 + 2a^2 = 2a^2 + 4a - 6 = 2(a^2 + 2a - 3).$$

Los valores de a que hacen cero el determinante $|A|$ son:

$$a^2 + 2a - 3 = 0 \rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \rightarrow a_1 = 1, a_2 = -3.$$

Por consiguiente, $|A| = 2(a^2 + 2a + 3) = 2(a - 1)(a + 3)$.

Para $a = 1$ y $a = -3$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq -3$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por tanto, se pueden considerar tres casos:

1) Para $a = 1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Al ser cero el determinante $|A|$ y todos los elementos de la última columna de la matriz A^+, todos sus menores de orden 3 son cero; por tanto, el rango de la matriz A^+ es menor que 3, $r^+ < 3$.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A_{3,4}^+$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado.

2) Para $a = -3$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Al ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 12 - 0 + 0 + 0 - 12 = -16 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

3) Para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq -3$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A_{3,4}^+$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados.

Resolución:

1) Para $a = 1$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$

Nota: Se ha suprimido la tercera ecuación, porque en la determinación del rango de la matriz A no han intervenido sus coeficientes (no se ha utilizado la tercera fila de la matriz). Esto quiere decir que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras.

Considerando como parámetro z, $z = t$:

$$\begin{cases} 2x + y = t \\ x - y = t \end{cases} \rightarrow 3x = 2t \rightarrow x = \frac{2t}{3}; \qquad y = x - t = \frac{2t}{3} - t = \frac{2t - 3t}{3} = \frac{-t}{3}.$$

Las soluciones son $x = \frac{2t}{3}$, $y = -\frac{t}{3}$, $z = t$, para todo valor real de t.

2) Para $a = -3$ el sistema no tiene solución, por ser incompatible.

3) Para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq -3$ se resuelve por la regla de Cramer ($|A| \neq 0$):

$$A(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a-1 & -1 & -1 \\ a-1 & 0 & -2a \end{vmatrix} = 2(a-1)^2; \qquad A(y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ a & a-1 & -1 \\ 3 & a-1 & -2a \end{vmatrix} = -5(a-1)^2;$$

$$A(z) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & -1 & a-1 \\ 3 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2.$$

$$x = \frac{A(x)}{|A|} = \frac{2(a-1)^2}{2(a-1)(a+3)} = \frac{a-1}{a+3};$$

$$y = \frac{A(y)}{|A|} = \frac{-5(a-1)^2}{2(a-1)(a+3)} = \frac{-5(a-1)}{2(a+3)};$$

$$z = \frac{A(z)}{|A|} = \frac{-(a-1)^2}{2(a-1)(a+3)} = \frac{-(a-1)}{2(a+3)}.$$

Las soluciones son $x = \frac{a-1}{a+3}$, $y = -\frac{5(a-1)}{2(a+3)}$, $z = -\frac{a-1}{2(a+3)}$, para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq -3$.

e) **Discusión:**

Se trata de una familia de sistemas, dependientes del parámetro a, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & -a & 2 \\ 1 & 1 & a & 10 \end{pmatrix}.$$

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 12a - 3a - 16 + 24 + 2a - 12a = 8 - a.$$

Para $a = 8$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 8$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por consiguiente, se pueden considerar dos casos:

1) Para $a = 8$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & -8 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Al ser $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \\ 1 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ 1 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0$, el rango de la matriz ampliada A^+ es menor que 3, $r^+ < 3$.

Como $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado.

2) Para todo valor real de $a \neq 8$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados.

Resolución:

1) Para $a = 8$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - 8z = 2 \\ x + y + 8z = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 6y - 8z = 2, \\ x + y + 8z = 10. \end{cases}$

Nota: Se ha suprimido la primera ecuación, porque no han intervenido sus coeficientes en la determinación del rango de la matriz A (no se ha utilizado la primera fila de la matriz). Esto indica que la primera ecuación es combinación lineal de las otras dos.

Considerando como parámetro z, $z = t$:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 2 + 8t \\ x + y = 10 - 8t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 2 + 8t \\ -6x - 6y = -60 + 48t \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow -2x = -58 + 56t \rightarrow x = 29 - 28t;$$

$$y = 10 - 8t - x = 10 - 8t - 29 + 28t = 20t - 19.$$

Las soluciones son $x = 29 - 28t$, $y = 20t - 19$, $z = t$, para todo valor real de t.

2) Para todo valor real de $a \neq 8$ se resuelve por la regla de Cramer ($|A| \neq 0$):

$$A(x) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & -a \\ 10 & 1 & a \end{vmatrix} = 29(8 - a); \qquad A(y) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & -a \\ 1 & 10 & a \end{vmatrix} = 19(a - 8);$$

$$A(z) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x = \frac{A(x)}{|A|} = \frac{29(8 - a)}{8 - a} = 29; \qquad y = \frac{A(y)}{|A|} = \frac{-19(8 - a)}{8 - a} = -19;$$

$$z = \frac{A(z)}{|A|} = \frac{0}{8 - a} = 0.$$

Las soluciones son $x = 29$, $y = -19$, $z = 0$, para todo valor real de $a \neq 8$.

f) **Discusión:**

Es una familia de sistemas, que dependen del parámetro a, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a + 1 & 1 & -a \\ 1 & a + 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ a + 1 & 1 & -a & a \\ 1 & a + 1 & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Se analiza el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a + 1 & 1 & -a \\ 1 & a + 1 & 0 \end{vmatrix} 0 - a + (a + 1)^2 - 1 + a^2(a + 1) - 0;$$

$$|A| = -a + a^2 + 2a + 1 - 1 + a^3 + a^2 = a^3 + 2a^2 + a = a(a^2 + 2a + 1) = a(a + 1)^2.$$

Los valores de a que hacen cero el determinante $|A|$ son $a = 0$ y $a = -1$; para todo valor real de $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por tanto, se pueden considerar tres casos:

1) Para $a = 0$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Al ser cero el determinante $|A|$ y todos los elementos de la última columna de la matriz A^+, todos sus menores de orden 3 son cero; por tanto, el rango de la matriz A^+ es menor que 3, $r^+ < 3$.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado.

2) Para $a = -1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Al ser $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 0 - 0 + 0 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

3) Para todo valor real de $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados.

Resolución:

1) Para $a = 0$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + z = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$

Considerando como parámetro z, $z = t$: $\begin{cases} y = -t, \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -y = t.$

Las soluciones son $x = t$, $y = -t$, $z = t$, para todo valor real de t.

2) Para $a = -1$ el sistema no tiene solución, ya que es incompatible.

3) Para todo valor real de $a \neq 0$ y $a \neq -1$ se resuelve por la regla de Cramer ($|A| \neq 0$):

$$A(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & -a \\ 2a & a+1 & 0 \end{vmatrix} = -a(a + 1);$$

$$A(y) = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ a+1 & a & -a \\ 1 & 2a & 0 \end{vmatrix} = a(2a^2 + 2a + 1);$$

$$A(z) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 2a \end{vmatrix} = -a(a^2 + a + 1).$$

$$x = \frac{A(x)}{|A|} = \frac{-a(a+1)}{a(a+1)^2} = -\frac{1}{a+1};$$

$$y = \frac{A(y)}{|A|} = \frac{a(2a^2+2a+1)}{a(a+1)^2} = \frac{2a^2+2a+1}{(a+1)^2};$$

$$z = \frac{A(z)}{|A|} = \frac{-a(a^2+a+1)}{a(a+1)^2} = -\frac{a^2+a+1}{(a+1)^2}.$$

Las soluciones son $x = -\dfrac{1}{a+1}$, $y = \dfrac{2a^2+2a+1}{(a+1)^2}$, $z = -\dfrac{a^2+a+1}{(a+1)^2}$, para todo valor real de $a \neq 0$ y $a \neq -1$.

g) **Discusión:**

Se trata de una familia de sistemas, dependientes del parámetro a, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -4 & 8 & a \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -80 + 16 + 4 - 4 + 80 - 16 = 0.$$

Como $|A| = 0$, el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

Se analizan los menores de orden 3 de la matriz ampliada A^+:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = |A| = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & a \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -40 + 2a - 36 + 36 + 10a - 8 = 12a - 48 = 12(a-4);$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 2 & 8 & a \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 80 - a + 72 - 72 - 20a + 4 = 84 - 21a = 21(4-a);$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -4 & 8 & a \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 32 + 2a - 144 + 144 - 8a - 8 = 24 - 6a = 6(4-a).$$

Para $a = 4$ los tres últimos menores de orden 3 son cero; para todo valor real de $a \neq 4$ esos tres menores de orden 3 son distintos de cero. Por consiguiente, se pueden considerar dos casos:

1) Para $a = 4$ el rango de la matriz A^+ es menor que 3, $r^+ < 3$.

Como $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 2 = -12 \neq 0$, los rangos de las matrices A y A^+ son $r = r^+ = 2$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado.

2) Para todo valor real de a $\neq 4$ el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

Como el rango de la matriz A es $r = 2$, de acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, los sistemas son incompatibles.

Resolución:

1) Para $a = 4$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} 5x + 2y - z = 9 \\ 2x - 4y + 8z = 4 \\ x - 2y + 4z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = 9, \\ x - 2y + 4z = 2. \end{cases}$

Nota: Se ha suprimido la segunda ecuación, porque sus coeficientes no han intervenido en la determinación del rango de la matriz A (no se ha utilizado la segunda fila de la matriz). Esto expresa que la segunda ecuación es combinación lineal de las otras dos.

Considerando como parámetro z, $z = t$:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9 + t \\ x - 2y = 2 - 4t \end{cases} \rightarrow 6x = 11 - 3t \rightarrow x = \frac{11 - 3t}{6};$$

$$y = \frac{x - 2 + 4t}{2} = \frac{11 - 3t - 12 + 24t}{12} = \frac{21t - 1}{12}.$$

Las soluciones son $x = \dfrac{11 - 3t}{6}$, $y = \dfrac{21t - 1}{12}$, $z = t$, para todo valor real de t.

2) Para todo valor real de a $\neq 4$ los sistemas no tienen solución, porque son incompatibles.

h) **Discusión:**

Es una familia de sistemas, que dependen del parámetro a, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Se analiza el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)(a^2 + a - 2).$$

(Se ha descompuesto en factores el trinomio $a^3 - 3a + 2$ utilizando la regla de Ruffini.)

Los valores de a que hacen cero el determinante $|A|$ son:

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ a^2 + a - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow a_2 = 1,\ a_3 = -2. \end{cases}$$

Por consiguiente, $|A| = (a - 1)(a^2 + a - 2) = (a - 1)(a - 1)(a + 2) = (a - 1)^2 (a + 2)$.

Para $a = 1$ y $a = -2$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por tanto, se pueden considerar tres casos:

1) Para $a = 1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como todos los menores de orden 2 de la matriz A son cero, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, el rango de la matriz A es $r = 1$.

Al ser cero todos los menores de orden 3, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, y todos los menores de orden 2,

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, de la matriz A^+, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 1$.

En virtud del teorema de Rouché, como $r = r^+ = 1 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado (con $n - r = 3 - 1 = 2$ grados de libertad).

2) Para $a = -2$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Al ser $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 2 + 1 + 2 - 4 - 4 = 9 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

3) Para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados.

Resolución:

1) Para $a = 1$ se tiene el sistema particular $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right. \rightarrow x + y + z = 1.$

Considerando como parámetros x e y, $x = t$ e $y = u$: $z = 1 - t - u$.

Las soluciones son $x = t$, $y = u$, $z = 1 - t - u$, para todo valor real de t y de u.

2) Para $a = -2$ el sistema no tiene solución, ya que es incompatible.

3) Para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq -2$ se resuelve por la regla de Cramer ($|A| \neq 0$):

$$A(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a^2 + a - a^3 - 1 - a^2 = -a^3 + a^2 + a - 1;$$

$$A(x) = -a^3 + a^2 + a - 1 = (a - 1)(-a^2 + 1) = -(a - 1)^2 (a + 1);$$

(se ha descompuesto en factores el polinomio $-a^3 + a^2 + a - 1$ utilizando la regla de Ruffini;)

$$A(y) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + a^2 - a - a^3 - a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2;$$

$$A(z) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^4 + a + 1 - a - a^2 - a^2 = a^4 - 2a^2 + 1;$$

$$A(z) = a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2 = (a-1)^2 (a+1)^2.$$

$$x = \frac{A(x)}{|A|} = \frac{-(a-1)^2 (a+1)}{(a-1)^2 (a+2)} = -\frac{a+1}{a+2};$$

$$y = \frac{A(y)}{|A|} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2 (a+2)} = \frac{1}{a+2};$$

$$z = \frac{A(z)}{|A|} = \frac{(a-1)^2 (a+1)^2}{(a-1)^2 (a+2)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

Las soluciones son $x = -\frac{a+1}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$, $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$, para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq -2$.

i) **Discusión:**

Se trata de una familia de sistemas, dependientes del parámetro a, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & -a & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2a^2 + (a+1) - 2 + a + a(a+1);$$

$$|A| = -a^2 + 3a - 2 = -(a^2 - 3a + 2) = -(a-1)(a-2).$$

(Se ha descompuesto en factores el trinomio $a^2 - 3a + 2$ utilizando la regla de Ruffini.)

Para $a = 1$ y $a = 2$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por consiguiente, se pueden considerar tres casos:

1) Para $a = 1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Al ser cero todos los menores de orden 3 de la matriz A^+ (la matriz tiene iguales las filas segunda y tercera) y como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado.

2) Para $a = 2$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Al ser $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 9 - 6 - 0 + 6 = 8 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

3) Para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados.

Resolución:

1) Para $a = 1$ se tiene el sistema particular $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2, \\ 2x + y - z = 0. \end{array} \right.$

Considerando como parámetro z, $z = t$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 - t \\ -2x - y = -t \end{array} \right. \rightarrow -x = 2 - 2t \rightarrow x = 2t - 2;$$

$$y = 2 - t - x = 2 - t - 2t + 2 = 4 - 3t.$$

Las soluciones son $x = 2t - 2$, $y = 4 - 3t$, $z = t$, para todo valor real de t.

2) Para $a = 2$ el sistema no tiene solución, puesto que es incompatible.

3) Para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq 2$ se resuelve por la regla de Cramer ($|A| \neq 0$):

$$A(x) = \begin{vmatrix} a+1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 1-a & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(a + 1) - a^2(1 - a) + 0 - (1 - a) + a(a + 1) + 0;$$

$$A(x) = a^3 + a - 2 = (a - 1)(a^2 + a + 2);$$

(se ha descompuesto en factores el trinomio $a^3 + a - 2$ utilizando la regla de Ruffini;)

$$A(y) = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ a+1 & 0 & -a \\ 2 & 1-a & -1 \end{vmatrix};$$

$$A(y) = -0 - 2a(a + 1) + (a + 1)(1 - a) - 0 + a(1 - a) + (a + 1)^2;$$

$$A(y) = -(3a^2 - a - 2) = -(a - 1)(3a + 2);$$

(se ha descompuesto en factores el trinomio $3a^2 - a - 2$ utilizando la regla de Ruffini;)

$$A(z) = \begin{vmatrix} 1 & a & a+1 \\ a+1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1-a \end{vmatrix};$$

$$A(z) = (1-a) + 0 + (a+1)^2 - 2(a+1) - 0 - a(a+1)(1-a);$$

$$A(z) = a^3 + a^2 - 2a = a(a^2 + a - 2) = a(a-1)(a+2);$$

(se ha descompuesto en factores el trinomio $a^2 + a - 2$ utilizando la regla de Ruffini.)

$$x = \frac{A(x)}{|A|} = \frac{(a-1)(a^2+a+2)}{-(a-1)(a-2)} = -\frac{a^2+a+2}{a-2};$$

$$y = \frac{A(y)}{|A|} = \frac{-(a-1)(3a+2)}{-(a-1)(a-2)} = \frac{3a+2}{a-2};$$

$$z = \frac{A(z)}{|A|} = \frac{a(a-1)(a+2)}{-(a-1)(a-2)} = -\frac{a(a+2)}{a-2}.$$

Las soluciones son $x = -\dfrac{a^2+a+2}{a-2}$, $y = \dfrac{3a+2}{a-2}$, $z = -\dfrac{a(a+2)}{a-2}$, para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

j) **Discusión:**

Es una familia de sistemas, que dependen del parámetro a, con m = 4 ecuaciones y n = 3 incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ 2 & 0 & -3 & a \end{pmatrix}.$$

Se halla el rango de la matriz A de los coeficientes:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 16 = -15 \neq 0$, el rango de la matriz A es r = 3.

Se analiza el determinante $|A^+|$ de la matriz ampliada. Sustituyendo la tercera fila por la que resulta al restarle el doble de la segunda y desarrollando el determinante que se obtiene (equivalente al $|A^+|$) por los elementos de la segunda columna, se deduce:

$$|A^+| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -8 & 0 & 1 & a-10 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -8 & 1 & a-10 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix};$$

$$|A^+| = a - 4(a-10) + 72 - 6 + 3(a-10) - 16a = -16a + 76.$$

Para $a = \dfrac{76}{16} = \dfrac{19}{4}$ el determinante $|A^+|$ es cero; para todo valor real de $a \neq \dfrac{19}{4}$ el determinante $|A^+|$ es distinto de cero. Por tanto, se pueden considerar dos casos:

1) Para $a = \dfrac{19}{4}$ el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$, ya que $A = A_{4,3}$ es submatriz de $A^+ = A_4^+$ y el rango de la matriz A es r = 3.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, el sistema es compatible y determinado.

2) Para todo valor real de $a \neq \frac{19}{4}$ el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 4$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = 3 \neq 4 = r^+$, los sistemas son incompatibles.

Resolución:

1) Para $a = \frac{19}{4}$ se tiene el sistema particular
$$\left\{\begin{array}{l} x - 2z = 3 \\ 4x + y = 5 \\ 2y + z = \dfrac{19}{4} \\ 2x - 3z = \dfrac{19}{4} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 2z = 3, \\ 4x + y = 5, \\ 2y + z = \dfrac{19}{4}. \end{array}\right.$$

Nota: Se ha suprimido la última ecuación, porque sus coeficientes no han intervenido en la determinación del rango de la matriz A (no se ha utilizado la última fila de la matriz). Esto quiere decir que la última ecuación es combinación lineal de las otras tres.

Llamando B a la matriz de los coeficientes del último sistema, como $|B| = -15 \neq 0$, se resuelve por la regla de Cramer:

$$B(x) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ \dfrac{19}{4} & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{15}{2}; \qquad B(y) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & \dfrac{19}{4} & 1 \end{vmatrix} = -45;$$

$$B(z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & \dfrac{19}{4} \end{vmatrix} = \frac{75}{4}.$$

$$x = \frac{B(x)}{|B|} = -\frac{15}{2} : (-15) = \frac{1}{2}; \qquad y = \frac{B(y)}{|B|} = \frac{-45}{-15} = 3;$$

$$z = \frac{B(z)}{|B|} = \frac{75}{4} : (-15) = -\frac{5}{4}.$$

Las soluciones son $x = \frac{1}{2}$, $y = 3$, $z = -\frac{5}{4}$.

2) Para todo valor real de $a \neq \frac{19}{4}$ los sistemas no tienen solución, ya que son incompatibles.

k) **Discusión:**

Se trata de una familia de sistemas, dependientes del parámetro a, con $m = 4$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -a & 3 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & -1 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 3 & -a & 3 & 4 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se estudia el determinante $|A^+|$ de la matriz ampliada. Se obtiene un determinante equivalente efectuando en él las siguientes transformaciones sucesivas:

1) Se sustituye la cuarta fila por la que resulta al restarle la segunda.

2) En el determinante obtenido se cambia la segunda columna por la que se deduce al restarle la cuarta.

$$|A^+| = \begin{vmatrix} 3 & -a & 3 & 4 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & -a & 3 & 4 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{2)}{=} \begin{vmatrix} 3 & -a-4 & 3 & 4 \\ a & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el último determinante por los elementos de la cuarta fila y aplicando la regla de Sarrus al determinante de orden 3 que se obtiene, resulta:

$$|A^+| = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -a-4 & 3 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$|A^+| = 3[-3 + (a+4) - 6a + 3 - 6 + a(a+4)] = 3(a^2 - a - 2).$$

Los valores que hacen cero el determinante $|A^+|$ son:

$$a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow a_1 = 2,\ a_2 = -1.$$

Para $a = 2$ y $a = -1$ el determinante $|A^+|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 2$ y $a \neq -1$ el determinante $|A^+|$ es distinto de cero. Por consiguiente, se pueden considerar tres casos:

1) Para $a = 2$ el rango de la matriz A^+ es menor que 4, $r^+ < 4$.

   En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 4 - 2 - 8 + 1 = -9 \neq 0$, los rangos de las matrices A y A^+ son $r = r^+ = 3$.

   En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, el sistema es compatible y determinado.

2) Para $a = -1$ el rango de la matriz A^+ es menor que 4, $r^+ < 4$.

   En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$, todos

   los menores de orden 3 de la matriz A son cero; por tanto, el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

Al ser $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 4 - 4 + 6 + 1 = 12 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r = 3$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

3) Para todo valor real de $a \neq 2$ y $a \neq -1$ el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 4$.

Al ser $A = A_{4,3}$, su rango es menor que 4, $r < 4$.

Según el teorema de Rouché, como $r \neq r^+ = 4$, los sistemas son incompatibles.

Resolución:

1) Para $a = 2$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + 4y - z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 2, \\ x - y + z = 1, \\ 2x + 4y - z = 5. \end{cases}$

Nota: Se ha suprimido la primera ecuación, porque sus coeficientes no han intervenido en la determinación del rango de la matriz A (no se ha utilizado la primera fila de la matriz). Esto indica que la primera ecuación es combinación lineal de las otras tres.

Se resuelve el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1;$$

$$\begin{cases} -2x - y + z = -2 \\ 2x + 4y - z = 5 \end{cases} \rightarrow 3y = 3 \rightarrow y = 1;$$

$$z = 1 - x + y = 1 - 1 + 1 = 1.$$

Las soluciones son $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

2) Para $a = -1$ el sistema no tiene solución, porque es incompatible.

3) Para todo valor real de $a \neq 2$ y $a \neq -1$ los sistemas no tienen solución, ya que son incompatibles.

l) **Discusión:**

Es una familia de sistemas, que dependen del parámetro a, con $m = 4$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ a & 2 & a+2 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -a & 3 \\ a & 2 & a+2 & a^2-2 \end{pmatrix}.$$

Se analiza el determinante $|A^+|$ de la matriz ampliada. Se obtiene un determinante equivalente efectuando en él las siguientes transformaciones:

1) Se sustituye la segunda fila por la que resulta al restarle la primera multiplicada por 4.

2) Se cambia la tercera fila por la que se obtiene al restarle la primera.

3) Se sustituye la cuarta fila por la que resulta al restarle el doble de la primera.

$$|A^+| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -a & 3 \\ a & 2 & a+2 & a^2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ a-2 & 0 & a+4 & a^2-8 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el último determinante por los elementos de la segunda columna y el determinante de orden 3 que se obtiene por los elementos de la segunda fila, resulta:

$$|A^+| = (-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 0 & 1-a & 0 \\ a-2 & a+4 & a^2-8 \end{vmatrix} = -(1-a)\cdot \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ a-2 & a^2-8 \end{vmatrix};$$

$$|A^+| = -(1-a)\,[-(a^2-8)+7(a-2)] = (1-a)\,(a^2-7a+6).$$

Los valores que hacen cero el determinante $|A^+|$ son:

$$\begin{cases} 1-a=0 \\ a^2-7a+6=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ a = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \dfrac{7 \pm 5}{2} \rightarrow a_2 = 6,\ a_3 = 1. \end{cases}$$

Para $a = 1$ y $a = 6$ el determinante $|A^+|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq 6$ el determinante $|A^+|$ es distinto de cero. Por tanto, se pueden considerar tres casos:

1) Para $a = 1$ el rango de la matriz A^+ es menor que 4, $r^+ < 4$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 1 - 6 + 4 + 2 - 9 = 2 \neq 0$, los rangos de las matrices A y A^+ son $r = r^+ = 3$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, el sistema es compatible y determinado.

2) Para $a = 6$ el rango de la matriz A^+ es menor que 4, $r^+ < 4$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -6 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -6 & 3 \\ 6 & 2 & 8 & 34 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -24 - 1 - 3 + 4 + 1 + 18 = -5 \neq 0$, los rangos de las matrices A y A^+ son $r = r^+ = 3$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, el sistema es compatible y determinado.

3) Para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq 6$ el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 4$.

Al ser $A = A_{4,3}$, su rango es menor que 4, $r < 4$.

Según el teorema de Rouché, como $r \neq r^+ = 4$, los sistemas son incompatibles.

Resolución:

1) Para a = 1 se tiene el sistema particular $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 3 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ x + y - z = 3 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y - z = 3, \\ 3x + 4y - z = 5, \\ x + 2y + 3z = -1. \end{array}\right.$

Llamando B a la matriz de los coeficientes del último sistema, como $|B| = 2 \neq 0$, se resuelve por la regla de Cramer:

$$B(x) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 14; \quad B(y) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8; \quad B(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x = \frac{B(x)}{|B|} = \frac{14}{2} = 7; \qquad y = \frac{B(y)}{|B|} = \frac{-8}{2} = -4; \qquad z = \frac{B(z)}{|B|} = \frac{0}{2} = 0.$$

Las soluciones son $x = 7$, $y = -4$, $z = 0$.

2) Para a = 6 se tiene el sistema particular $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 3 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ x + y - 6z = 3 \\ 6x + 2y + 8z = 34 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y - z = 3, \\ 3x + 4y - z = 5, \\ x + y - 6z = 3. \end{array}\right.$

Nota: Se ha suprimido la última ecuación, porque sus coeficientes no han intervenido en la determinación del rango de la matriz A (no se ha utilizado la última fila de la matriz). Esto quiere decir que la última ecuación es combinación lineal de las otras tres.

Llamando C a la matriz de los coeficientes del último sistema, como $|C| = -5 \neq 0$, se resuelve por la regla de Cramer:

$$C(x) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -35; \quad C(y) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 20; \quad C(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x = \frac{C(x)}{|C|} = \frac{-35}{-5} = 7; \qquad y = \frac{C(y)}{|C|} = \frac{20}{-5} = -4; \qquad z = \frac{C(z)}{|C|} = \frac{0}{-5} = 0.$$

Las soluciones son $x = 7$, $y = -4$, $z = 0$ (las mismas que para a = 1).

3) Para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq 6$ los sistemas no tienen solución, porque son incompatibles.

m) **Discusión:**

Se trata de un sistema con m = 3 ecuaciones y n = 4 incógnitas, por lo que no puede ser compatible y determinado, ya que no puede cumplir que $r = r^+ = 4 = n$, porque los rangos de la matriz $A = A_{3,4}$ de los coeficientes y de la matriz ampliada $A^+ = A^+_{3,5}$ no pueden ser mayores que 3. Dichas matrices son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -24 - 5 - 16 + 8 + 8 + 30 = 1 \neq 0$, los rangos de las matrices A y A^+ son $r = r^+ = 3$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 \neq 4 = n$, el sistema es compatible e indeterminado.

Resolución:

Como en la determinación de los rangos de las matrices A y A^+ no han intervenido los coeficientes de la incógnita u (no se ha utilizado la cuarta columna de dichas matrices), considerando como parámetro u, u = t, se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 4z = -3 - t, \\ x - 2y + z = 5 + t, \\ x - 4y + 6z = 10 - 2t. \end{cases}$$

Llamando B a la matriz de los coeficientes del sistema anterior, como $|B| = 1 \neq 0$, se resuelve por la regla de Cramer:

$$B(x) = \begin{vmatrix} -3-t & -5 & 4 \\ 5+t & -2 & 1 \\ 10-2t & -4 & 6 \end{vmatrix} = 16t + 124; \qquad B(y) = \begin{vmatrix} 2 & -3-t & 4 \\ 1 & 5+t & 1 \\ 1 & 10-2t & 6 \end{vmatrix} = 9t + 75;$$

$$B(z) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3-t \\ 1 & -2 & 5+t \\ 1 & -4 & 10-2t \end{vmatrix} = 3t + 31.$$

$$x = \frac{B(x)}{|B|} = \frac{16t + 124}{1} = 16t + 124; \qquad y = \frac{B(y)}{|B|} = \frac{9t + 75}{1} = 9t + 75;$$

$$z = \frac{B(z)}{|B|} = \frac{3t + 31}{1} = 3t + 31.$$

Las soluciones son $x = 16t + 124$, $y = 9t + 75$, $z = 3t + 31$, $u = t$, para todo valor real de t.

n) **Discusión:**

Es una familia de sistemas, dependientes del parámetro a, con m = 4 ecuaciones y n = 3 incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se estudia el determinante $|A^+|$ de la matriz ampliada. Se obtiene un determinante equivalente efectuando en él las siguientes transformaciones:

1) Se sustituye la primera fila por la que resulta al sumarle la cuarta.

2) Se cambia la segunda fila por la que se obtiene al restarle el doble de la primera.

3) Se reemplaza la tercera fila por la que se deduce al restarle la cuarta.

$$|A^+| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ a-1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el último determinante por los elementos de la segunda columna y aplicando la regla de Sarrus al determinante de orden 3 que resulta, se obtiene:

$$|A^+| = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & 4 \\ a-1 & -2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$|A^+| = -[-30 + 8(a-1) + 0 + 0 + 16 + 6] = 16 - 8a = 8(2-a).$$

Para $a = 2$ el determinante $|A^+|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 2$ el determinante $|A^+|$ es distinto de cero. Por consiguiente, se pueden considerar dos casos:

1) Para $a = 2$ el rango de la matriz A^+ es menor que 4, $r^+ < 4$.

   En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 - 1 - 2 - 3 - 1 = -8 \neq 0$, los rangos de las matrices A y A^+ son $r = r^+ = 3$.

   De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, el sistema es compatible y determinado.

2) Para todo valor real de $a \neq 2$ el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 4$.

   Al ser $A = A_{4,3}$, su rango es menor que 4, $r < 4$ (ya se ha estudiado que $r = 3$).

   En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = 3 \neq 4 = r^+$, los sistemas son incompatibles.

Resolución:

1) Para $a = 2$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + 2y - 3z = 8, \\ x - y + z = -2. \end{cases}$

   Nota: Se ha suprimido la tercera ecuación, ya que sus coeficientes no han intervenido en la determinación del rango de la matriz A (no se ha utilizado la tercera fila de la matriz). Esto indica que la tercera ecuación es combinación lineal de las otras tres.

   Se resuelve el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + y - z = 2 \end{cases} \rightarrow 2y = 4 \rightarrow y = 2;$$

$$\begin{cases} x + z = 2 - 2 = 0 \\ -x + 3z = -8 + 4 = -4 \end{cases} \rightarrow 4z = -4 \rightarrow z = -1;$$

$$x = 2 - y - z = 2 - 2 + 1 = 1.$$

   Las soluciones son $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

2) Para todo valor real de $a \neq 2$ los sistemas no tienen solución, puesto que son incompatibles.

o) **Discusión:**

Se trata de una familia de sistemas homogéneos (los términos independientes son todos cero), sistemas que dependen de los parámetros a y b, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 2$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son iguales:

$$A = A^+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$, los rangos de las matrices A y A^+ son $r = r^+ = 2$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 = n$, los sistemas son compatibles y determinados para cualesquiera valores reales de a y b.

Resolución:

Como en la determinación de los rangos de las matrices A y A^+ no han intervenido los coeficientes de la tercera ecuación (no se ha utilizado la tercera fila de dichas matrices), se tiene el siguiente sistema, que se resuelve por el método de reducción:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0; \qquad x = y = 0.$$

Las soluciones son $x = 0$, $y = 0$ (para cualesquiera valores de a y b).

p) **Discusión:**

Es una familia de sistemas, dependientes de los parámetros a y b, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & a & b \end{pmatrix}.$$

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 0 - 0 + 4 - a = a - 2.$$

Para $a = 2$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 2$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por tanto, se pueden considerar dos casos:

1) Para $a = 2$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & b \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Se analizan los menores de orden 3 de la matriz ampliada A^+:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |A| = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 2b + 3 + 1 - 3 - 2 - b = b - 1;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & b \end{vmatrix} = -4b + 0 + 2 + 6 - 4 - 0 = -4b + 4 = -4(b - i);$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = -2b + 0 + 2 + 2 - 2 - 0 = -2b + 2 = -2(b - 1).$$

Para $b = 1$ los tres últimos menores de orden 3 son cero; para todo valor real de $b \neq 1$ esos tres menores de orden 3 son distintos de cero. Por consiguiente, se presentan dos casos:

- Para $b = 1$ el rango de la matriz A^+ es menor que 3, $r^+ < 3$.

  Al ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

  Como el rango de la matriz A es $r = 2$, de acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado.

- Para todo valor real de $b \neq 1$ el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

  Como el rango de la matriz A es $r = 2$, en virtud del teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, los sistemas son incompatibles.

2) Para todo valor real de $a \neq 2$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

   Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, independientemente del valor de b, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

   Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados.

Resolución:

1) • Para $a = 2$ y $b = 1$ se tiene el sistema particular:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + y - 2z = 1. \end{cases}$$

Nota: Se ha suprimido la tercera ecuación, porque no han intervenido sus coeficientes en la determinación del rango de la matriz A (no se ha utilizado la tercera fila de la matriz). Esto quiere decir que la tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos.

Considerando como parámetro z, $z = t$:

$$\begin{cases} -2x - y = -1 \\ x + y = 1 + 2t \end{cases} \rightarrow -x = 2t \rightarrow x = -2t;$$

$$y = 1 + 2t - x = 1 + 2t + 2t = 1 + 4t.$$

Las soluciones son $x = -2t$, $y = 1 + 4t$, $z = t$, para todo valor real de t.

- Para $a = 2$ y todo valor real de $b \neq 1$ los sistemas no tienen solución, ya que son incompatibles.

2) Para todo valor real de $a \neq 2$ se resuelve por la regla de Cramer ($|A| \neq 0$):

$$A(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ b & 1 & a \end{vmatrix} = -2b + 2; \qquad A(y) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & b & a \end{vmatrix} = a + 4b - 6;$$

$$A(z) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = b - 1.$$

$$x = \frac{A(x)}{|A|} = \frac{-2b+2}{a-2}; \qquad y = \frac{A(y)}{|A|} = \frac{a+4b-6}{a-2}; \qquad z = \frac{A(z)}{|A|} = \frac{b-1}{a-2}.$$

Las soluciones son $x = \dfrac{-2b+2}{a-2}$, $y = \dfrac{a+4b-6}{a-2}$, $z = \dfrac{b-1}{a-2}$, para todo valor real de $a \neq 2$ y para todo valor real de b.

q) **Discusión:**

Se trata de una familia de sistemas, que dependen de los parámetros a y b, con $m = 4$ ecuaciones y $n = 2$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \\ 5 & -13 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 3 & 7 & a \\ 1 & 1 & b \\ 5 & -13 & 5a - 2b \\ 1 & 2 & a + b - 1 \end{pmatrix}.$$

Se halla el rango de la matriz A de los coeficientes:

Como $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 7 = -4 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Se calcula el rango de la matriz ampliada A^+ analizando sus menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & a \\ 1 & 1 & b \\ 5 & -13 & 5a - 2b \end{vmatrix} = 15a - 6b + 35b - 13a - 5a + 39b - 35a + 14b = -38a + 82b;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & a + b - 1 \end{vmatrix} = 3a + 3b - 3 + 7b + 2a - a - 6b - 7a - 7b + 7 = -3a - 3b + 4;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & a \\ 5 & -13 & 5a - 2b \\ 1 & 2 & a + b - 1 \end{vmatrix} = -39a - 39b + 39 + 35a - 14b + 10a + 13a - 30a +$$
$$+ 12b - 35a - 35b + 35 = -46a - 76b + 74;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 5 & -13 & 5a - 2b \\ 1 & 2 & a + b - 1 \end{vmatrix} = -13a - 13b + 13 + 5a - 2b + 10b + 13b - 10a +$$
$$+ 4b - 5a - 5b + 5 = -23a + 7b + 18.$$

Por tanto, se pueden considerar dos casos:

1) Para los valores de a y b que satisfacen el sistema $\begin{cases} -38a + 82b = 0 \\ -3a - 3b + 4 = 0 \\ -46a - 76b + 74 = 0 \\ -23a + 7b + 18 = 0 \end{cases}$ el rango de la matriz A^+ es menor que 3, $r^+ < 3$.

Se resuelve el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} -46a - 76b = -74 \\ -23a + 7b = -18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -46a - 76b = -74 \\ 46a - 14b = 36 \end{cases} \rightarrow -90b = -38 \rightarrow b = \frac{38}{90} = \frac{19}{45};$$

$$a = \frac{7b + 18}{23} = \frac{1}{23}\left(7 \cdot \frac{19}{45} + 18\right) = \frac{1}{23}\left(\frac{133 + 810}{45}\right) = \frac{1}{23} \cdot \frac{943}{45} = \frac{41}{45}.$$

Se comprueba que los valores de a y b satisfacen las dos primeras ecuaciones del sistema:

$$-38 \cdot \frac{41}{45} + 82 \cdot \frac{19}{45} = \frac{-1\,558 + 1\,558}{45} = 0;$$

$$-3 \cdot \frac{41}{45} - 3 \cdot \frac{19}{45} + 4 = \frac{-123 - 57 + 180}{45} = 0.$$

Es decir, para $a = \frac{41}{45}$ y $b = \frac{19}{45}$ el rango de la matriz A^+ es menor que 3, $r^+ < 3$.

Como $A = A_{4,2}$ es submatriz de $A^+ = A^+_{4,3}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 = n$, el sistema es compatible y determinado.

2) Para todo valor real de $a \neq \frac{41}{45}$ y todo valor real de $b \neq \frac{19}{45}$ el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, los sistemas son incompatibles.

Resolución:

1) Para $a = \frac{41}{45}$ y $b = \frac{19}{45}$ se tiene el sistema particular:

$$\begin{cases} 3x + 7y = \dfrac{41}{45} \\ x + y = \dfrac{19}{45} \\ 5x - 13y = 5 \cdot \dfrac{41}{45} - 2 \cdot \dfrac{19}{45} \\ x + 2y = \dfrac{41}{45} + \dfrac{19}{45} - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 7y = \dfrac{41}{45}, \\ x + y = \dfrac{19}{45}. \end{cases}$$

Nota: Se han suprimido las dos últimas ecuaciones, ya que sus coeficientes no han intervenido en la determinación del rango de la matriz A (no se han utilizado las dos últimas filas de la matriz). Esto indica que las dos últimas ecuaciones son combinación lineal de las dos primeras.

Se resuelve el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} 3x + 7y = \dfrac{41}{45} \\ -3x - 3y = -\dfrac{57}{45} \end{cases} \rightarrow 4y = -\frac{16}{45} \rightarrow y = -\frac{4}{45};$$

$$\begin{cases} 3x + 7y = \dfrac{41}{45} \\ -7x - 7y = -\dfrac{133}{45} \end{cases} \rightarrow -4x = -\frac{92}{45} \rightarrow x = \frac{23}{45}.$$

Las soluciones son $x = \dfrac{23}{45}$, $y = -\dfrac{4}{45}$.

2) Para todo valor real de $a \neq \dfrac{41}{45}$ y todo valor real de $b \neq \dfrac{19}{45}$ los sistemas no tienen solución, porque son incompatibles.

r) **Discusión:**

Es una familia de sistemas, dependientes de los parámetros a, b y c, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Se halla el rango de la matriz A de los coeficientes:

Como el determinante $|A|$ es cero y todos los menores de orden 2 también son cero, ya que tienen dos filas iguales, el rango de la matriz A es $r = 1$.

Se calcula el rango de la matriz ampliada A^+:

Como todos los menores de orden 3 son cero, porque tienen dos columnas iguales, y todos los menores de orden 2 en los que no intervienen elementos de la última columna también son cero, por la misma razón, se analizan sólo los menores de orden 2 que tengan elementos de la última columna. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - a; \quad \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix} = c - a; \quad \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = c - b.$$

Por consiguiente, se pueden considerar dos casos:

1) Para los valores de a, b y c que satisfacen el sistema $\begin{cases} b - a = 0 \\ c - a = 0 \\ c - b = 0 \end{cases}$ el rango de la matriz A^+ es menor que 2, $r^+ < 2$.

   Resolviendo el sistema, se obtiene $a = b = c$.

   Es decir, para $a = b = c$ el rango de la matriz A^+ es menor que 2, $r^+ < 2$; esto es, $r^+ = 1$.

   Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 1 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado (con $n - r = 3 - 1 = 2$ grados de libertad).

2) Para los valores de a, b y c no iguales entre sí (los tres distintos o dos iguales) el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

   De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = 1 \neq 2 = r^+$, los sistemas son incompatibles.

Resolución:

1) Para $a = b = c$ se tiene el sistema particular:

$$\begin{cases} x + y + z = a = b = c \\ x + y + z = a = b = c \\ x + y + z = a = b = c \end{cases} \rightarrow x + y + z = a = b = c.$$

Considerando como parámetros x e y, $x = t$ e $y = u$:

$$z = a - t - u = b - t - u = c - t - u.$$

Las soluciones son $x = t$, $y = u$, $z = a - t - u = b - t - u = c - t - u$, para todo valor real de t y de u.

2) Para valores de a, b y c no iguales entre sí los sistemas no tienen solución, ya que son incompatibles.

2. Discutir e interpretar gráficamente el sistema $\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Discusión:

Se trata de una familia de sistemas con $m = 2$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \end{pmatrix}.$$

En el cálculo de los rangos de las matrices A y A^+ se presentan los siguientes casos:

1) Si los vectores (a,b,c) y (d,e,f) no son proporcionales, existen en las matrices A y A^+ menores de orden 2 distintos de cero. Es decir, los rangos de las matrices A y A^+ son $r = r^+ = 2$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, los sistemas son compatibles e indeterminados (con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad).

2) Si los vectores (a,b,c) y (d,e,f) son proporcionales y $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \neq \frac{p}{q}$, todos los menores de orden 2 de la matriz A son cero y existen en la matriz A^+ menores de orden 2 distintos de cero. Es decir, el rango de la matriz A es $r = 1$ y el de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = 1 \neq 2 = r^+$, los sistemas son incompatibles.

3) Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{p}{q}$, todos los menores de orden 2 de las matrices A y A^+ son cero. Es decir, los rangos de las matrices A y A^+ son $r = r^+ = 1$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 1 < 3 = n$, los sistemas son compatibles e indeterminados (con $n - r = 3 - 1 = 2$ grados de libertad).

Interpretación geométrica:

Cada una de las ecuaciones representa un plano en el espacio tridimensional.

1) Si los vectores (a,b,c) y (d,e,f) no son proporcionales, los sistemas representan dos planos que se cortan en una recta.

2) Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \neq \frac{p}{q}$, los sistemas representan dos planos paralelos, ya que dichos planos no se cortan (los sistemas no tienen solución).

3) Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{p}{q}$, los sistemas representan dos planos coincidentes, porque las dos ecuaciones de los sistemas son una misma ecuación.

3. Sea el sistema $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x - my = 5 \end{cases}$

a) Calcular para qué valor de m es $x = 0$.

b) Hallar para qué valor de m es incompatible el sistema.

c) Hacer la interpretación geométrica de los casos *a)* y *b)*.

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

a) Se resuelve el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} mx + 2my = 10m \\ 2x - 2my = 10 \end{cases} \rightarrow x(m + 2) = 10(m + 1) \rightarrow x = \frac{10(m + 1)}{m + 2}, \text{ para } m \neq -2.$$

En el supuesto de que $x = 0$ (para $m \neq -2$), resulta:

$$x = \frac{10(m + 1)}{m + 2} = 0 \rightarrow 10(m + 1) = 0 \rightarrow m + 1 = 0 \rightarrow m = -1.$$

Por tanto, para $m = -1$ el valor de x es igual a cero.

b) La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

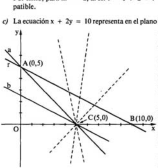
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -m \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 1 & -m & 5 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 10 = -5 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

Si $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m - 2 = 0$, es decir, si $m = -2$, el rango de la matriz A es $r = 1$.

Por tanto, para $m = -2$, al ser $r = 1 \neq 2 = r^+$, según el teorema de Rouché, el sistema es incompatible.

c) La ecuación $x + 2y = 10$ representa en el plano la recta r que pasa por los puntos A (0,5) y B (10,0).



La ecuación $x - my = 5$ representa en el plano el haz de rectas de vértice el punto C (5,0).

En el caso *a)*, como $m = -1$, la ecuación de la recta a del haz es $x + y = 5$, que corta a la recta r en el punto de abscisa $x = 0$, punto (0,5), solución del sistema formado por las ecuaciones de las rectas a y r.

En el caso *b)*, como $m = -2$, la ecuación de la recta b del haz es $x + 2y = 5$, que es paralela a la recta r, ya que el sistema formado por las ecuaciones de las rectas b y r no tiene solución (las rectas no se cortan).

La figura adjunta es la representación gráfica correspondiente.

4. Sea el sistema $\begin{cases} x + y + z = a + 1 \\ x + y + (a - 1)z = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de a es compatible y determinado?

b) Resolverlo para dichos valores.

c) ¿Para qué valores de a es indeterminado? Resolverlo para dichos valores.

d) ¿Es incompatible para algún valor de a?

(Propuesto en la Univ. de León.)

Se trata de una familia de sistemas con m = 3 ecuaciones y n = 3 incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & a-1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) De acuerdo con el teorema de Rouché, para que los sistemas sean compatibles y determinados ha de cumplirse que $r = r^+ = n = 3$, lo que supone que el rango de la matriz A ha de ser 3; es decir, $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix};$$

$$|A| = 1 + (a - 1) + a - 1 - a(a - 1) - 1 = -a^2 + 3a - 2 = -(a^2 - 3a + 2).$$

Los valores de a que hacen cero el determinante $|A|$ son:

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow a_1 = 2,\ a_2 = 1.$$

Es decir, $|A| = -(a^2 - 3a + 2) = -(a - 2)(a - 1)$.

Por tanto, para todo valor real de $a \neq 2$ y $a \neq 1$ los sistemas son compatibles y determinados.

b) Se resuelve por la regla de Cramer ($|A| \neq 0$):

$$A(x) = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + a^2 + 2a - 1; \quad A(y) \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a - 2);$$

$$A(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a - 1.$$

$$x = \frac{A(x)}{|A|} = \frac{-a^3 + a^2 + 2a - 1}{-(a - 2)(a - 1)}; \quad y = \frac{A(y)}{|A|} = \frac{a(a - 2)}{-(a - 2)(a - 1)} = -\frac{a}{a - 1};$$

$$z = \frac{A(z)}{|A|} = \frac{a - 1}{-(a - 2)(a - 1)} = -\frac{1}{a - 2}.$$

Las soluciones son $x = \dfrac{a^3 - a^2 - 2a + 1}{(a - 2)(a - 1)}$, $y = -\dfrac{a}{a - 1}$, $z = -\dfrac{1}{a - 2}$, para todo valor real de $a \neq 2$ y $a \neq 1$.

c) Los casos posibles son para los valores de $a = 2$ y $a = 1$.

1) Para $a = 2$ la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al ser $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 6 - 3 - 4 - 1 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

2) Para $a = 1$ la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al ser $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 2 - 0 - 1 - 1 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

Por tanto, no existen valores de a para los que los sistemas sean indeterminados.

d) De acuerdo con los resultados del apartado anterior, los sistemas son incompatibles para los valores de $a = 2$ y $a = 1$.

5. Discutir y resolver el sistema $\begin{cases} (1-a)x + (1+2a)y + 2(a+1)z = a \\ ax + ay = 2(a+1) \\ 2x + (a+1)y + (a-1)z = a^2 - 2a + 9 \end{cases}$ para el valor de a para el que el sistema es indeterminado con un grado de libertad. ¿En alguna solución es $x = \dfrac{2}{\sqrt{11}}$?

Discusión:

Se trata de una familia de sistemas, que dependen del parámetro a, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 \\ a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 & a \\ a & a & 0 & 2a+2 \\ 2 & a+1 & a-1 & a^2-2a+9 \end{pmatrix}.$$

Se analiza el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes. Se obtiene un determinante equivalente efectuando en él las siguientes transformaciones sucesivas:

1) Se sustituye la segunda columna por la que resulta al restarle la tercera.

2) En el determinante obtenido se cambia la primera columna por la que se deduce al restarle la segunda.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 \\ a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{vmatrix} \overset{1)}{=} \begin{vmatrix} 1-a & -1 & 2a+2 \\ a & a & 0 \\ 2 & 2 & a-1 \end{vmatrix} \overset{2)}{=} \begin{vmatrix} 2-a & -1 & 2a+2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & a-1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el último determinante por los elementos de la primera columna y calculando el valor del determinante de orden 2 que se obtiene, resulta:

$$|A| = (2-a) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix} = (2-a)\,[a(a-1)-0] = a(a-1)(2-a).$$

Para $a = 0$, $a = 1$ y $a = 2$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por consiguiente, se pueden considerar cuatro casos:

1) Para $a = 0$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Al ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 0 - 0 - 2 - 0 = 2 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

2) Para $a = 1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Al ser cero todos los menores de orden 3 de la matriz A^+ (la matriz tiene proporcionales las filas segunda y tercera) y como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado (con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad).

3) Para $a = 2$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Al ser $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 10 = -12 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 + 108 + 4 - 0 - 30 - 108 = -26 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

4) Para todo valor real de $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados.

Resolución:

Se pide la resolución del sistema sólo para el caso en el que es indeterminado con un grado de libertad; es decir, para el caso 2):

- Para $a = 1$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} 3y + 4z = 1 \\ x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y + 4z = 1, \\ x + y = 4. \end{cases}$

Considerando como parámetro z, $z = t$:

$$\begin{cases} 3y = 1 - 4t \\ x + y = 4 \end{cases} \rightarrow \; y = \frac{1 - 4t}{3}; \quad x = 4 - y = 4 - \frac{1 - 4t}{3} = \frac{12 - 1 + 4t}{3} = \frac{11 + 4t}{3}.$$

Las soluciones son $x = \dfrac{11 + 4t}{3}$, $y = \dfrac{1 - 4t}{3}$, $z = t$, para todo valor real de t.

- Se halla el valor de t que hace $x = \dfrac{2}{\sqrt{11}}$:

$$x = \frac{11 + 4t}{3} = \frac{2}{\sqrt{11}}; \quad 11\sqrt{11} + 4\sqrt{11}t = 6;$$

$$4\sqrt{11}t = 6 - 11\sqrt{11}; \quad t = \frac{6 - 11\sqrt{11}}{4\sqrt{11}} = \frac{6\sqrt{11} - 121}{44}.$$

Por tanto, para $t = \dfrac{6\sqrt{11} - 121}{44} \approx -2{,}298$ se da la solución $x = \dfrac{2}{\sqrt{11}}$.

TEMA I-4.3. — Sistemas homogéneos

Ejercicios resueltos

1. *Determinar el valor de* a *para el que el sistema* $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ay - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$ *sea compatible. Resolverlo.*

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Al ser sistema homogéneo, es compatible para todo valor de a.

Distinción: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7a + 56;$ $\begin{cases} 7a + 56 \neq 0 \rightarrow a \neq -8 \rightarrow r = 3 = n; \\ 7a + 56 = 0 \rightarrow a = -8 \rightarrow n = 3 \neq r < 3. \end{cases}$

Para todo $a \neq -8$ es sistema que sólo admite la solución trivial.

Para $a = -8$ es sistema compatible e indeterminado.

Resolución: Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 19 \neq 0 \rightarrow r = 2.$

En la determinación del rango no han intervenido la 3.ª fila y la 3.ª columna; por eso, se elimina la 3.ª ecuación y se considera $z = t$:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= -t \\ x + 8y &= 3t \end{aligned}\right\}; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -t & -3 \\ 3t & 8 \end{vmatrix}}{19} = \frac{t}{19}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -t \\ 1 & 3t \end{vmatrix}}{19} = \frac{7t}{19}.$$

Son soluciones: $x = \dfrac{t}{19}$, $y = \dfrac{7t}{19}$, $z = t$, $\forall t$.

2. *Determinar* a, b *y* c *para que* $a(x + y + 3z) + b(x - y - z) + c(-x + y + z) \equiv 0.$

El primer miembro se puede escribir en la forma:

$ax + ay + 3az + bx - by - bz - cx + cy + cz \equiv 0 \rightarrow$
$\rightarrow x(a + b - c) + y(a - b + c) + z(3a - b + c) \equiv 0 = 0x + 0y + 0z.$

De la última expresión se deduce el sistema $\begin{cases} a + b - c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ 3a - b + c = 0 \end{cases}$

En este caso: $n = 3$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow r = 2.$

$r = 2 \neq 3 = n$: el sistema es homogéneo con soluciones, además de la trivial.

Como en la determinación del rango no han intervenido la 3.ª fila y la 3.ª columna, se elimina la 3.ª ecuación y se considera el parámetro $c = t$:

$\left.\begin{aligned} a + b &= t \\ a - b &= -t \end{aligned}\right\} \rightarrow$ sumando miembro a miembro: $2a = 0 \rightarrow a = 0;$
despejando b en la 1.ª o en la 2.ª ecuación: $b = t - a = t - 0 = t.$

Son soluciones: $a = 0$, $b = t$, $c = t$, $\forall t$.

Solución de los ejercicios propuestos

1. Siendo $x = 0$ e $y = z = 1$ solución del sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$, comprobar que $x = 0$ e $y = z = t$ es también solución del sistema.

Sustituyendo en cada ecuación del sistema los valores de x, y, z, se tiene: $\begin{cases} 0 + t - t = 0, \\ 0 - t + t = 0, \\ 0 - t + t = 0. \end{cases}$

Como dichos valores satisfacen las tres ecuaciones, $x = 0$ e $y = z = t$ es solución del sistema.

2. Discutir y resolver, si es posible, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \\ 4x + 2y + 7z = 0 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$

a) **Discusión:**

Se trata de un sistema homogéneo con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

Se analiza el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 1) = 1 \neq 0.$$

Como $|A| \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 3$.

Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 3 = n$, el sistema es incompatible (admite únicamente la solución trivial $x = y = z = 0$).

b) **Discusión:**

Es un sistema homogéneo con $m = 2$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

Se calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ de los coeficientes:

Como $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 3 = -5 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Según el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible (indeterminado) con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad.

Resolución:

Considerando como parámetro z, $z = t$:

$$\begin{cases} 4x - y = -2t \\ 3x - 2y = -4t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x - 2y = -4t \\ -3x + 2y = 4t \end{cases} \rightarrow 5x = 0 \rightarrow x = 0; \quad y = 4x + 2t = 2t.$$

Las soluciones son $x = 0$, $y = 2t$, $z = t$, para todo valor real de t.

c) **Discusión:**

Se trata de un sistema homogéneo con m = 4 ecuaciones y n = 3 incógnitas.

Se halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ de los coeficientes:

Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 2 + 4 + 4 - 4 - 8 = 10 \neq 0$, el rango de la matriz A es r = 3.

De acuerdo con el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser r = 3 = n, el sistema es incompatible (únicamente admite la solución trivial x = y = z = 0).

d) **Discusión:**

Es un sistema homogéneo con m = 3 ecuaciones y n = 2 incógnitas.

Se calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ de los coeficientes:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$, el rango de la matriz A es r = 2.

Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser r = 2 = n, el sistema es incompatible (solamente admite la solución trivial x = y = 0).

3. Discutir los siguientes sistemas, según los valores de a, y resolver en su caso:

a) $\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ -4x - 2y + az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

b) $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ (a + 1)x + y - az = 0 \\ x + (a + 1)y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 3x + z = 0 \\ ax + z = 0 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

d) $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + ay + 2z = 0 \\ (a - 1)x + a^2y + az = 0 \\ 2x + a(a + 2)y + (a + 4)z = 0 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

f) $\begin{cases} (4 - a)x - 5y + 7z = 0 \\ x - (4 + a)y + 9z = 0 \\ -4x + (5 - a)z = 0 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

a) **Discusión:**

Se trata de una familia de sistemas homogéneos, que dependen del parámetro a, con m = 3 ecuaciones y n = 3 incógnitas.

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & a \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -36 + 9a + 16 - 6 - 12a + 72 = 46 - 3a.$$

Para $a = \dfrac{46}{3}$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq \dfrac{46}{3}$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por tanto, se presentan dos casos:

1) Para $a = \dfrac{46}{3}$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

   Como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

   Según el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible (indeterminado) con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad.

2) Para todo valor real de $a \neq \dfrac{46}{3}$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

   Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 3 = n$, los sistemas son incompatibles.

Resolución:

1) Para $a = \dfrac{46}{3}$ se tiene el sistema particular:

$$\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ -4x - 2y + \dfrac{46}{3} z = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 3y - z = 0, \\ 3x + 4y + 6z = 0. \end{cases}$$

   Nota: Se ha suprimido la segunda ecuación, porque no han intervenido sus coeficientes en la determinación del rango de la matriz A (no se ha utilizado la segunda fila de la matriz). Esto quiere decir que la segunda ecuación es combinación lineal de las otras dos.

   Considerando como parámetro z, $z = t$:

$$\begin{cases} 3x + 3y = t \\ 3x + 4y = -6t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -t \\ 3x + 4y = -6t \end{cases} \rightarrow y = -7t; \quad x = \frac{t - 3y}{3} = \frac{t + 21t}{3} = \frac{22t}{3}.$$

   Las soluciones son $x = \dfrac{22t}{3}$, $y = -7t$, $z = t$, para todo valor real de t.

2) Para todo valor real de $a \neq \dfrac{46}{3}$ los sistemas son incompatibles y admiten únicamente la solución trivial $x = y = z = 0$.

b) **Discusión:**

Es una familia de sistemas homogéneos, dependientes del parámetro a, con m = 3 ecuaciones y n = 3 incógnitas.

Se analiza el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - a + (a+1)^2 - 1 + a^2(a+1) - 0;$$

$$|A| = -a + a^2 + 2a + 1 - 1 + a^3 + a^2 = a^3 + 2a^2 + a = a(a^2 + 2a + 1) = a(a+1)^2.$$

Para $a = 0$ y $a = -1$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por consiguiente, se presentan tres casos:

1) Para $a = 0$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

De acuerdo con el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible (indeterminado) con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad.

2) Para $a = -1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible (indeterminado) con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad.

3) Para todo valor real de $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

Según el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 3 = n$, los sistemas son incompatibles.

Resolución:

1) Para $a = 0$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + z = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$

Considerando como parámetro z, $z = t$: $\begin{cases} y = -t, \\ x + y = 0 \rightarrow x = -y = t. \end{cases}$

Las soluciones son $x = t$, $y = -t$, $z = t$, para todo valor real de t.

2) Para $a = -1$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$

Nota: Se ha suprimido la tercera ecuación, porque sus coeficientes no han intervenido en la determinación del rango de la matriz A (no se ha utilizado la tercera fila de la matriz). Esto indica que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras.

Considerando como parámetro z, $z = t$: $\begin{cases} -x + y = -t \rightarrow x = y + t = -t + t = 0, \\ y = -t. \end{cases}$

Obsérvese que resulta $x = 0$, valor que ya se había obtenido en la tercera ecuación del sistema, ecuación suprimida por ser combinación lineal de las dos primeras (en efecto, se consigue restando la primera ecuación de la segunda).

Las soluciones son $x = 0$, $y = -t$, $z = t$, para todo valor real de t.

3) Para todo valor real de $a \neq 0$ y $a \neq -1$ los sistemas son incompatibles y solamente admiten la solución trivial $x = y = z = 0$.

c) **Discusión:**

Se trata de una familia de sistemas homogéneos, que dependen del parámetro a, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 2$ incógnitas.

Se halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ de los coeficientes:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 = n$, independientemente del valor de a, los sistemas son incompatibles (únicamente admiten la solución trivial $x = z = 0$).

d) **Discusión:**

Es una familia de sistemas (no homogéneos, salvo para $a = 0$), dependientes del parámetro a, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a;$$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)(a^2 + a - 2) = (a - 1)^2 (a + 2).$$

(Se ha descompuesto en factores el trinomio $a^3 - 3a + 2$ utilizando la regla de Ruffini.)

Para $a = 1$ y $a = -2$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por tanto, se presentan tres casos:

1) Para $a = 1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como todos los menores de orden 2 de la matriz A son cero, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, el rango de la matriz A es $r = 1$.

Al ser cero todos los menores de orden 3 de la matriz A^+ (todos ellos tienen al menos dos columnas iguales), el rango de la matriz A^+ es menor que 3, $r^+ < 3$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = 1 \neq 2 = r^+$, el sistema es incompatible.

2) Para $a = -2$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Al ser $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4(4 - 1) = 4 \cdot 3 = 12 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

3) Para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados.

Resolución:

1) Para $a = 1$ el sistema no tiene solución, ya que es incompatible.
2) Para $a = -2$ el sistema no tiene solución, porque es incompatible.
3) Para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq -2$ se resuelve por la regla de Cramer ($|A| \neq 0$):

$$A(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = a^2(1 - a) = -a^2(a - 1);$$

$$A(y) = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = -a^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2(a - 1);$$

$$A(z) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2(a^2 - 1) = a^2(a + 1)(a - 1).$$

$$x = \frac{A(x)}{|A|} = \frac{-a^2(a - 1)}{(a - 1)^2 (a + 2)} = \frac{-a^2}{(a - 1)(a + 2)}; \quad y = \frac{A(y)}{|A|} = \frac{-a^2}{(a - 1)(a + 2)};$$

$$z = \frac{A(z)}{|A|} = \frac{a^2(a + 1)(a - 1)}{(a - 1)^2 (a + 2)} = \frac{a^2(a + 1)}{(a - 1)(a + 2)}.$$

Las soluciones son $x = y = \dfrac{-a^2}{(a - 1)(a + 2)}$, $z = \dfrac{a^2(a + 1)}{(a - 1)(a + 2)}$, para todo valor real de $a \neq 1$ y $a \neq -2$.

Nota: Si $a = 0$, es un sistema homogéneo. Como para $a = 0$ el rango de la matriz A es $r = 3$, por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 3 = n$, el sistema admite solamente la solución trivial $x = y = z = 0$. Este resultado está en concordancia con el obtenido en el caso 3), ya que por ser solución única el sistema es compatible y determinado.

e) **Discusión:**

Se trata de una familia de sistemas homogéneos, que dependen del parámetro a, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ a-1 & a^2 & a \\ 2 & a^2+2a & a+4 \end{vmatrix};$$

$$|A| = a^2(a+4) + 2a^2 + 2(a-1)(a^2+2a) - 4a^2 - a(a^2+2a) - a(a-1)(a+4);$$

$$|A| = a^3 + 4a^2 + 2a^2 + 2a^3 + 2a^2 - 4a - 4a^2 - a^3 - 2a^2 - a^3 - 3a^2 + 4a;$$

$$|A| = a^3 - a^2 = a^2(a-1).$$

Para $a = 0$ y $a = 1$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por consiguiente, se presentan tres casos:

1) Para $a = 0$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Por el teorema del Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible (indeterminado) con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad.

2) Para $a = 1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

De acuerdo con el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible (indeterminado) con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad.

3) Para todo valor real de $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

Según el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 3 = n$, los sistemas son incompatibles.

Resolución:

1) Para $a = 0$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0, \\ -x = 0. \end{cases}$

En el sistema no figura la incógnita y, que se considera como parámetro, $y = t$.

Las soluciones son $x = 0$, $y = t$, $z = \dfrac{-x}{2} = 0$, para todo valor real de t.

2) Para $a = 1$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$

Nota: Se ha suprimido la tercera ecuación, ya que sus coeficientes no han intervenido en la determinación del rango de la matriz A (no se ha utilizado la tercera fila de la matriz). Esto quiere decir que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras.

Considerando como parámetro z, z = t: $\begin{cases} x + y = -2t \rightarrow x = -y - 2t = t - 2t = -t, \\ y = -t. \end{cases}$

Las soluciones son $x = -t$, $y = -t$, $z = t$, para todo valor real de t.

3) Para todo valor real de $a \neq 0$ y $a \neq 1$ los sistemas son incompatibles y únicamente admiten la solución trivial $x = y = z = 0$.

f) **Discusión:**

Es una familia de sistemas homogéneos, dependientes del parámetro a, con m = 3 ecuaciones y n = 3 incógnitas.

Se analiza el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4-a & -5 & 7 \\ 1 & -4-a & 9 \\ -4 & 0 & 5-a \end{vmatrix};$$

$$|A| = (4-a)(-4-a)(5-a) + 180 + 0 + 28(-4-a) - 0 + 5(5-a);$$

$$|A| = -80 + 5a^2 + 16a - a^3 + 180 - 112 - 28a + 25 - 5a;$$

$$|A| = -a^3 + 5a^2 - 17a + 13 = -(a-1)(a^2 - 4a + 13).$$

(Se ha descompuesto en factores el polinomio $-a^3 + 5a^2 - 17a + 13$ aplicando la regla de Ruffini.)

Los valores de a que hacen cero el determinante $|A|$ son:

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ a^2 - 4a + 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ a = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \text{ (raíces imaginarias).} \end{cases}$$

Para $a = 1$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 1$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por tanto, se presentan dos casos:

1) Para $a = 1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

   En este caso la matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -5 & 9 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   Como $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 5 = -10 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

   Según el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible (indeterminado) con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad.

2) Para todo valor real de $a \neq 1$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

   Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 3 = n$, los sistemas son incompatibles.

Resolución:

1) Para $a = 1$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} 3x - 5y + 7z = 0 \\ x - 5y + 9z = 0 \\ -4x + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 5y + 7z = 0, \\ x - 5y + 9z = 0. \end{cases}$

   Nota: Se ha suprimido la tercera ecuación, porque sus coeficientes no han intervenido en la determinación del rango de la matriz A (no se ha utilizado la tercera fila de la matriz). Esto indica que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras.

Considerando como parámetro z, z = t:

$$\begin{cases} 3x - 5y = -7t \\ -x + 5y = 9t \end{cases} \rightarrow 2x = 2t \rightarrow x = t; \quad y = \frac{x + 9t}{5} = \frac{t + 9t}{5} = \frac{10t}{5} = 2t.$$

Las soluciones son $x = t$, $y = 2t$, $z = t$, para todo valor real de t.

2) Para todo valor real de $a \neq 1$ los sistemas son incompatibles y solamente admiten la solución trivial $x = y = z = 0$.

4. Discutir el sistema, según los valores de a y de b: $\begin{cases} 4x + 2y + 7z = 0 \\ 2x - ay + z = 0 \\ bx + 2y - 4z = 0 \end{cases}$

Se trata de una familia de sistemas homogéneos, que dependen de los parámetros a y b, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & -a & 1 \\ b & 2 & -4 \end{vmatrix} = 16a + 2b + 28 + 7ab - 8 + 16 = 16a + 2b + 7ab + 36.$$

Dado un sistema cualquiera de la familia, se pueden considerar dos casos:

1) Para los valores de a y b que hacen cero el determinante $|A|$, es decir, para valores de a y b tales que $16a + 2b + 7ab + 36 = 0$, el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

Como $\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 14 = -10 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

De acuerdo con el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible (indeterminado) con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad.

2) Para los valores de a y b que no hacen cero el determinante $|A|$, esto es, para valores de a y b, tales que $16a + 2b + 7ab + 36 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 3$.

En virtud del teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 3 = n$, el sistema es incompatible (admite únicamente la solución trivial $x = y = z = 0$).

5. Discutir y resolver en los casos de compatibilidad el sistema $\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 2b \end{pmatrix}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Discusión:

Efectuando la multiplicación, resulta $\begin{cases} ax + y + az = b, \\ ay + z = b, \\ x + ay + z = 2b, \end{cases}$ que es una familia de sistemas, dependientes de los parámetros a y b, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

Según que $b = 0$ o que el valor real de $b \neq 0$ se presentan dos casos:

a) Para $b = 0$ se trata de una familia de sistemas homogéneos.

Se analiza el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 + 0 - a^2 - a^2 - 0 = 1 - a^2 = (1 + a)(1 - a).$$

Para $a = -1$ y $a = 1$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por consiguiente, hay que considerar tres casos:

1) Para $a = -1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible (indeterminado) con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad.

2) Para $a = 1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Según el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible (indeterminado) con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad.

3) Para todo valor real de $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

De acuerdo con el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 3 = n$, los sistemas son incompatibles.

b) Para todo valor real de $b \neq 0$ se trata de una familia de sistemas no homogéneos.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} a & 1 & a & b \\ 0 & a & 1 & b \\ 1 & a & 1 & 2b \end{pmatrix}.$$

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 + 0 - a^2 - a^2 - 0 = 1 - a^2 = (1 + a)(1 - a).$$

Para $a = -1$ y $a = 1$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por tanto, se consideran tres casos:

1) Para $a = -1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 1 & 2b \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Se determina el rango de la matriz A^+ (según los valores de b) analizando sus menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = |A| = 0;$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & b \\ 1 & -1 & 2b \end{vmatrix} = 2b + b - 0 + b - b - 0 = 3b;$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & b \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2b \end{vmatrix} = -2b - b + 0 - b + b + 0 = -3b;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & b \\ -1 & 1 & b \\ -1 & 1 & 2b \end{vmatrix} = 2b + b - b + b - b - 2b = 0.$$

Por consiguiente, se pueden considerar dos casos:

- Para los valores de b que satisfacen el sistema $\begin{cases} 3b = 0, \\ -3b = 0, \end{cases}$ es decir, para $b = 0$ el rango de la matriz A^+ es menor que 3, $r^+ < 3$.

  Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

  Por el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado.

  Nota: Obsérvese que éste es el caso estudiado en el número 1) del apartado *a)* de este mismo ejercicio. (Se trata en realidad de un sistema homogéneo.)

- Para todo valor real de $b \neq 0$ el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

  Según el teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, los sistemas son incompatibles.

2) Para $a = 1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

   En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 2b \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Se determina el rango de la matriz A^+ (según los valores de b) analizando sus menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |A| = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2b \end{vmatrix} = 2b + b + 0 - b - b - 0 = b;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2b \end{vmatrix} = 2b + b + b - b - b - 2b = 0.$$

Por tanto, se pueden considerar dos casos:

- Para $b = 0$ el rango de la matriz A^+ es menor que 3, $r^+ < 3$.

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

  De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado.

  Nota: Obsérvese que éste es el caso estudiado en el número 2) del apartado *a)* de este mismo ejercicio. (Se trata en realidad de un sistema homogéneo.)

- Para todo valor real de $b \neq 0$ el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

  En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, los sistemas son incompatibles.

3) Para todo valor real de $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

   Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

   Por el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados para todo valor real de b.

Resolución:

a) Caso de una familia de sistemas homogéneos:

1) Para $a = -1$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0, \\ -y + z = 0. \end{cases}$

   Nota: Se ha suprimido la tercera ecuación, ya que sus coeficientes no han intervenido en la determinación del rango de la matriz A (no se ha utilizado la tercera fila de la matriz). Esto quiere decir que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras.

   Considerando como parámetro z, $z = t$: $\begin{cases} -x + y = t & \rightarrow x = y - t = t - t = 0, \\ -y = -t & \rightarrow y = t. \end{cases}$

   Las soluciones son $x = 0$, $y = t$, $z = t$, para todo valor real de t.

2) Para $a = 1$ se tiene el sistema particular $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$

   Considerando como parámetro z, $z = t$: $\begin{cases} x + y = -t & \rightarrow x = -y - t = t - t = 0, \\ y = -t. \end{cases}$

   Las soluciones son $x = 0$, $y = -t$, $z = t$, para todo valor real de t.

3) Para todo valor real de $a \neq -1$ y $a \neq 1$ los sistemas son incompatibles y solamente admiten la solución trivial $x = y = z = 0$.

b) Caso de una familia de sistemas no homogéneos:

1) Para $a = -1$ se han presentado dos casos:
   - Para $b = 0$ la solución es la obtenida en el número 1) del apartado *a)* anterior.
   - Para todo valor real de $b \neq 0$ los sistemas no tienen solución, ya que son incompatibles.

2) Para $a = 1$ se han presentado también dos casos:
   - Para $b = 0$ la solución es la obtenida en el número 2) del apartado *a)* anterior.
   - Para todo valor real de $b \neq 0$ los sistemas no tienen solución, porque son incompatibles.

3) Para todo valor real de $a \neq -1$ y $a \neq 1$ se resuelve por la regla de Cramer ($|A| \neq 0$):

$$A(x) = \begin{vmatrix} b & 1 & a \\ b & a & 1 \\ 2b & a & 1 \end{vmatrix} = ab + 2b + a^2b - 2a^2b - ab - b = -a^2b + b = b(1 - a^2);$$

$$A(y) = \begin{vmatrix} a & b & a \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = ab + b + 0 - ab - 2ab - 0 = -2ab + b = b(1 - 2a);$$

$$A(z) = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 0 & a & b \\ 1 & a & 2b \end{vmatrix} = 2a^2b + b + 0 - ab - a^2b - 0 = a^2b - ab + b = b(a^2 - a + 1).$$

$$x = \frac{A(x)}{|A|} = \frac{b(1 - a^2)}{1 - a^2} = b;\quad y = \frac{A(y)}{|A|} = \frac{b(1 - 2a)}{1 - a^2};\quad z = \frac{A(z)}{|A|} = \frac{b(a^2 - a + 1)}{1 - a^2}.$$

Las soluciones son $x = b$, $y = \dfrac{b(1 - 2a)}{1 - a^2}$, $z = \dfrac{b(a^2 - a + 1)}{1 - a^2}$, para todo valor real de $a \neq -1$ y $a \neq 1$ y para todo valor real de b.

6. Determinar a y b a fin de que $a(3x - 2y) + b(4x - 2y) \equiv 0$.

$a(3x - 2y) + b(4x - 2y) = 3ax - 2ay + 4bx - 2by = (3a + 4b)x + (-2a - 2b)y = 0x + 0y.$

Identificando los respectivos coeficientes, se tiene el sistema $\begin{cases} 3a + 4b = 0, \\ -2a - 2b = 0. \end{cases}$

Se trata de un sistema homogéneo con $m = 2$ ecuaciones y $n = 2$ incógnitas.

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 8 = 2 \neq 0.$$

Como $|A| \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 = n$, el sistema es incompatible (admite únicamente la solución trivial).

Por tanto, los valores pedidos son $a = 0$ y $b = 0$.

7. Determinar a, b y c para que $a(x - 2y + z) + b(x - 3y + 5z) + c(5x - 11y + 9z) \equiv 0$.

$$a(x - 2y + z) + b(x - 3y + 5z) + c(5x - 11y + 9z) =$$

$$= (a + b + 5c)x + (-2a - 3b - 11c)y + (a + 5b + 9c)z = 0x + 0y + 0z.$$

Identificando los respectivos coeficientes, se tiene el sistema $\begin{cases} a + b + 5c = 0, \\ -2a - 3b - 11c = 0, \\ a + 5b + 9c = 0. \end{cases}$

Es un sistema homogéneo con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

Se analiza el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & -11 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -27 - 11 - 50 + 15 + 55 + 18 = 0.$$

Como $|A| = 0$, el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

Al ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Según el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible (indeterminado) con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad.

Eliminando la segunda ecuación, cuyos coeficientes no han intervenido en la determinación del rango de la matriz A, y considerando como parámetro c, $c = t$:

$$\begin{cases} -a - b = 5t \\ a + 5b = -9t \end{cases} \rightarrow 4b = -4t \rightarrow b = -t; \qquad a = -b - 5t = t - 5t = -4t.$$

Los valores pedidos son $a = -4t$, $b = -t$ y $c = t$, para todo valor real de t.

8. Hacer la interpretación geométrica del sistema $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$

Se trata de una familia de sistemas homogéneos con $m = 2$ ecuaciones y $n = 2$ incógnitas.

Cada una de las ecuaciones representa en el plano una recta que pasa por el origen de coordenadas.

El determinante de la matriz de los coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

En el cálculo del rango de la matriz A de los coeficientes se presentan dos casos:

1) Si $ad - bc = 0$, el rango es $r = 1$.

   Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 1 < 2 = n$, los sistemas son compatibles e indeterminados (con $n - r = 2 - 1 = 1$ grado de libertad).

   Es decir, si los vectores (a,b) y (c,d) son proporcionales, $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$, los sistemas representan en el plano dos rectas coincidentes que pasan por el origen de coordenadas.

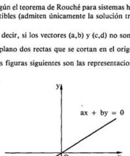
2) Si $ad - bc \neq 0$, el rango es $r = 2$.

   Según el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 = n$, los sistemas son incompatibles (admiten únicamente la solución trivial $x = y = 0$).

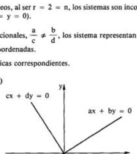
   Es decir, si los vectores (a,b) y (c,d) no son proporcionales, $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$, los sistema representan en el plano dos rectas que se cortan en el origen de coordenadas.

   Las figuras siguientes son las representaciones gráficas correspondientes.

1)



2)



TEMA I-5.1. —— Método de Gauss y sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios resueltos

1. Sistemas compatibles y determinados

Estudiar por el método de Gauss y resolver el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = 2 \end{cases}$

$\boxed{1}$	-1	1	0
1	2	3	1
1	-3	-1	2
0	$1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)$	$1 \cdot 3 - 1 \cdot 1$	$1 \cdot 1 - 1 \cdot 0$
0	$1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1)$	$1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1$	$1 \cdot 2 - 1 \cdot 0$

$=$

0	$\boxed{3}$	2	1
0	-2	-2	2
0	0	$3 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2$	$3 \cdot 2 - (-2) \cdot 1$

$=$

0	0	$\boxed{-2}$	8

El sistema es ahora: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y + 2z = 1 \\ -2z = 8 \end{cases}$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es $-6 \neq 0$, el rango es $r = 3$ y como $n = 3$, por el teorema de Rouché se deduce que se trata de un sistema *compatible* y *determinado*.

En la última ecuación se obtiene: $z = -4$.

Sustituyendo el valor de z en la 2.ª ecuación: $3y - 8 = 1$; $3y = 9$; $y = 3$.

Llevando los valores de z e y a la 1.ª ecuación: $x - 3 - 4 = 0$; $x = 7$.

Son soluciones: $x = 7$, $y = 3$, $z = -4$.

2. Sistemas compatibles e indeterminados

Estudiar y resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + y - z = -1 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$

Nota: A primera vista se percibe que la 2.ª ecuación y la 3.ª se obtienen, respectivamente, al multiplicar la 1.ª ecuación por -1 y por 2. Se sabe, pues, que es un *sistema compatible* e *indeterminado*.

$\boxed{1}$	-1	1	1
-1	1	-1	-1
2	-2	2	2
0	$1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)$	$1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1$	$1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1$
0	$1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1)$	$1 \cdot 2 - 2 \cdot 1$	$1 \cdot 2 - 2 \cdot 1$

$=$

0	$\boxed{0}$	0	0
0	0	0	0
0	0	$0 - 0$	$0 - 0$

$=$

0	0	$\boxed{0}$	0

El sistema es ahora: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \sim \quad x - y + z = 1.$

Nota: En el presente ejemplo han resultado dos ecuaciones $0 = 0$, que concuerda con el teorema de Rouché para dicho sistema:

$m = 1 < 3 = n$, el *sistema es compatible* e *indeterminado con dos parámetros*, por ejemplo: $y = m$, $z = n$; por consiguiente:

Son soluciones: $x = 1 + m - n;\ y = m;\ z = n;\ \forall m,\ \forall n.$

Como indica el ejemplo anterior, para *sistemas lineales no homogéneos, compatibles e indeterminados, en el método de Gauss se presentan identidades* $0 = 0$.

3. Sistemas incompatibles

Estudiar por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y + z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$

Nota: De entrada se percibe que se trata de un *sistema «absurdo»,* ya que la suma de dos números, $y + z$, no puede ser, a la vez, 2 y 1.

$\boxed{1}$	1	−2	0
0	1	1	2
0	1	1	1
0	$1 \cdot 1 - 0 \cdot 1$	$1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2)$	$1 \cdot 2 - 0 \cdot 0$
0	$1 \cdot 1 - 0 \cdot 1$	$1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2)$	$1 \cdot 1 - 0 \cdot 0$

0	$\boxed{1}$	1	2
0	1	1	1
0	0	$1 \cdot 1 - 1 \cdot 1$	$1 \cdot 1 - 1 \cdot 2$

0	0	$\boxed{0}$	−1

El sistema pasa a ser: $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y + z = 2 \\ 0 = -1 \end{cases}$

Como $0 \neq -1$, se trata de un sistema *incompatible.*

Para *sistemas incompatibles, en el método de Gauss aparecen desigualdades numéricas,* que señalan que son *sistemas «absurdos».*

4. Sistemas con mayor número de ecuaciones

Estudiar y resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - z = 1 \\ y - z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

En este caso: $m = 4$, $n = 3$.

x	y	z	
$\boxed{1}$	−1	1	2
1	0	−1	1
0	1	−1	0
1	1	−1	2
0	$\boxed{1}$	−2	−1
0	1	−1	0
0	2	−2	0
0	0	$\boxed{1}$	1
0	0	2	2

El sistema pasa a ser: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - 2z = -1 \\ z = 1 \\ 2z = 2 \end{cases}$

Las dos últimas ecuaciones son proporcionales; por tanto,

el sistema es: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - 2z = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es $1 \neq 0$, el rango es $r = 3$ y como $n = 3$, por el teorema de Rouché se deduce que se trata de un sistema *compatible* y *determinado*. Por el método de Gauss:

z	y	x	
$\boxed{1}$	0	0	1
−2	1	0	−1
1	−1	1	2
0	$\boxed{1}$	0	1
0	−1	1	1
0	0	$\boxed{1}$	2

El sistema pasa a ser: $\begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

La solución es: $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$.

Para *sistemas lineales con mayor número de ecuaciones, en el método de Gauss aparecen ecuaciones (filas) «proporcionales».*

5. Sistemas homogéneos compatibles

Estudiar y resolver por el método de Gauss el sistema homogéneo $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -2x + 2y + z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$

$\boxed{1}$	−1	1	0
−2	2	1	0
3	−3	0	0
0	$\boxed{0}$	3	0
0	0	−3	0
0	0	$\boxed{0}$	0

El sistema pasa a ser:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el rango es $r = 2$ y como $n = 3$, por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, se deduce que es un sistema *compatible*.

Si se considera como parámetro $x = t$, se tiene:

$$\begin{cases} t - y + z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = t + 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Son soluciones: $x = t$, $y = t$, $z = 0$, $\forall t$.

Para *sistemas lineales homogéneos compatibles*, como son *sistemas indeterminados, en el método de Gauss aparecen identidades* $0 = 0$.

6. Sistemas homogéneos incompatibles

Estudiar por el método de Gauss el sistema homogéneo $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

$$
\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & \boxed{2} & -1 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & \boxed{-3} & 0
\end{array}
$$

El sistema pasa a ser: $\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ -3z = 0 \end{array}\right.$

El determinante de la matriz de los coeficientes es $-6 \neq 0$ y el rango es $r = 3$. Como $r = 3 = n$, por el teorema de Rouché se deduce que es un sistema *homogéneo incompatible.*

Únicamente admite la solución trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

En *sistemas lineales homogéneos incompatibles, en el método de Gauss aparecen todos los pivotes distintos de cero.*

7. Sistemas homogéneos con mayor número de ecuaciones

Estudiar y resolver por el método de Gauss el sistema homogéneo $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right.$

$$
\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline
0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

El sistema pasa a ser: $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -z = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -z = 0 \end{array}\right.$

El determinante de la matriz de los coeficientes es $-1 \neq 0$ y el rango es $r = 3$. Como $r = 3 = n$, por el teorema de Rouché se deduce que es un sistema *homogéneo incompatible.*

Sólo admite la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Para *sistemas homogéneos con mayor número de ecuaciones, en el método de Gauss aparecen identidades numéricas* $0 = 0$, cuyas ecuaciones correspondientes se eliminan.

Solución de los ejercicios propuestos

1. Disponer en forma triangular y resolver por el método de Gauss-sustitución los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2z = 5 \end{array}\right.$ *b)* $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 4 \\ x - z = 1 \\ x + y = 3 \end{array}\right.$ *c)* $\left\{\begin{array}{l} x + y + z + u = 4 \\ x - y - z + u = 0 \\ x - y + z - u = 0 \\ y + u = 2 \end{array}\right.$

a)

x	y	z	
$\boxed{2}$	1	−1	1
1	−2	1	0
3	0	2	5
0	$\boxed{-5}$	3	−1
0	−3	7	7
0	0	$\boxed{-26}$	−38

El sistema equivalente en forma triangular es:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 1 \\ -5y + 3z = -1 \\ -26z = -38 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 1, \\ -5y + 3z = -1, \\ -13z = -19. \end{array}\right.$$

El valor del determinante de la matriz A de los coeficientes es $|A| = 130 \neq 0$ y el rango de la matriz A es $r = 3$; el rango de la matriz ampliada A^+ es $r^+ = 3$. Según el teorema de Rouché, como $r = r^+ = 3 = n$, el sistema es compatible y determinado.

De la tercera ecuación se deduce $z = \dfrac{19}{13}$.

De la segunda se obtiene $y = \dfrac{3z + 1}{5} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{57}{13} + 1\right) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{70}{13} = \dfrac{14}{13}$.

De la primera resulta $x = \dfrac{1 - y + z}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{14}{13} + \dfrac{19}{13}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{18}{13} = \dfrac{9}{13}$.

Las soluciones son $x = \dfrac{9}{13}$, $y = \dfrac{14}{13}$, $z = \dfrac{19}{13}$.

b)

x	y	z	
$\boxed{2}$	−1	1	4
1	0	−1	1
1	1	0	3
0	$\boxed{1}$	−3	−2
0	3	−1	2
0	0	$\boxed{8}$	8

El sistema equivalente en forma triangular es:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x - y + z = 4 \\ y - 3z = -2 \\ 8z = 8 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x - y + z = 4, \\ y - 3z = -2, \\ z = 1. \end{array}\right.$$

El valor del determinante de la matriz A de los coeficientes es $|A| = 2 \neq 0$ y el rango de la matriz A es $r = 3$; el rango de la matriz ampliada A^+ es $r^+ = 3$. Por el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, el sistema es compatible y determinado.

Sustituyendo el valor de z en la segunda ecuación, se deduce $y = 3z - 2 = 3 - 2 = 1$.

Reemplazando los valores de z e y en la primera, se obtiene

$$x = \frac{y - z + 4}{2} = \frac{1 - 1 + 4}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Las soluciones son $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$.

c)

x	y	z	u	
$\boxed{1}$	1	1	1	4
1	−1	−1	1	0
1	−1	1	−1	0
0	1	0	1	2
0	$\boxed{-2}$	−2	0	−4
0	−2	0	−2	−4
0	1	0	1	2
0	0	$\boxed{-4}$	4	0
0	0	2	−2	0
0	0	0	$\boxed{0}$	0

El sistema equivalente en forma triangular es:

$$\left\{\begin{array}{r} x + y + z + u = 4 \\ -2y - 2z = -4 \\ -4z + 4u = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{r} x + y + z + u = 4, \\ -y - z = -2, \\ -z + u = 0. \end{array}\right.$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 3$; el rango de la matriz ampliada A^+ es $r^+ = 3$. De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 < 4 = n$, el sistema propuesto es compatible e indeterminado (con $n - r = 4 - 3 = 1$ grado de libertad).

Considerando como parámetro u, $u = t$:

$z = u = t$; $\quad y = 2 - z = 2 - t$; $\quad x = 4 - y - z - u = 4 - 2 + t - t - t = 2 - t$.

Las soluciones son $x = y = 2 - t$, $z = u = t$, para todo valor real de t.

2. Discutir y resolver por el método de Gauss los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + z = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 2x + 10y - 8z + 6u = 2 \\ x - y + z - u = 2 \\ x + 15y - 12z + 9u = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8x + y + 4z = 9 \\ 5x - 2y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x - 3y - z = 2 \\ 3x + 4y + 3z = 3 \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \\ x + 5y = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 4 \\ 3y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 8 \end{cases}$ *j)* $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ 2x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 3z = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ *l)* $\begin{cases} x + y - z - u = 0 \\ x - y + z + u = 0 \\ x - y - z - u = 0 \\ x + y - z + u = 0 \end{cases}$

a)

x	y	
$\boxed{2}$	-1	1
1	1	0
0	$\boxed{3}$	-1

El sistema equivalente en forma triangular es:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y = -1, \\ -y + 2x = 1. \end{cases}$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 2$; el rango de la matriz ampliada A^+ es $r^+ = 2$. Por el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 = n$, el sistema es compatible y determinado.

Se aplica el método de Gauss al segundo sistema:

y	x	
$\boxed{3}$	0	-1
-1	2	1
0	$\boxed{6}$	2

El sistema equivalente en forma diagonal es:

$$\begin{cases} 3y = -1 \\ 6x = 2 \end{cases} \rightarrow y = -\frac{1}{3}; \quad x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Las soluciones son $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

Nota: Este procedimiento de resolución de sistemas se denomina método de Gauss-Jordan.

b)

x	y	z	
$\boxed{1}$	-1	-1	0
1	1	1	1
0	$\boxed{2}$	2	1

El sistema equivalente en forma triangular es:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2y + 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y + 2z = 1, \\ -y + x - z = 0. \end{cases}$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 2$; el rango de la matriz ampliada A^+ es $r^+ = 2$. Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado (con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad).

Aplicando el método de Gauss al segundo sistema, considerando como parámetro z, $z = t$:

y	x	
$\boxed{2}$	0	$1 - 2t$
-1	1	t
0	$\boxed{2}$	1

El sistema equivalente en forma diagonal es:

$$\begin{cases} 2y \quad = 1 - 2t \\ 2x = 1 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1 - 2t}{2}; \quad x = \frac{1}{2}.$$

Las soluciones son $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1 - 2t}{2}$, $z = t$, para todo valor real de t.

c)

x	y	z	
$\boxed{1}$	-1	1	0
1	0	1	1
1	-2	0	-1
0	$\boxed{1}$	0	1
0	-1	-1	-1
0	0	$\boxed{-1}$	0

El sistema equivalente en forma triangular es:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ \quad y \quad = 1 \\ \quad - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -z \quad = 0, \\ \quad y \quad = 1, \\ z - y + x = 0. \end{cases}$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 3$; el rango de la matriz ampliada A^+ es $r^+ = 3$. Por el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, el sistema es compatible y determinado.

Se aplica el método de Gauss al segundo sistema:

z	y	x	
$\boxed{-1}$	0	0	0
0	1	0	1
1	-1	1	0
0	$\boxed{-1}$	0	-1
0	1	-1	0
0	0	$\boxed{1}$	1

El sistema equivalente en forma diagonal es:

$$\begin{cases} -z \quad = 0 \\ \quad -y = -1 \\ \quad x = 1 \end{cases} \rightarrow z = 0; \quad y = 1; \quad x = 1.$$

Las soluciones son $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$.

d)

x	y	z	u	
$\boxed{2}$	10	-8	6	2
1	-1	1	-1	2
1	15	-12	9	0
0	$\boxed{-12}$	10	-8	2
0	20	-16	12	-2
0	0	$\boxed{-8}$	16	-16

El sistema equivalente en forma escalonada es:

$$\begin{cases} 2x + 10y - 8z + 6u = 2 \\ \quad - 12y + 10z - 8u = 2 \\ \quad\quad - 8z + 16u = -16 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -8z + \quad\quad 16u = -16, \\ 10z - 12y - \quad 8u = 2, \\ -8z + 10y + 2x + 6u = 2. \end{cases}$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 3$; el rango de la matriz ampliada A^+ es $r^+ = 3$. Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 < 4 = n$, el sistema es compatible e indeterminado (con $n - r = 4 - 3 = 1$ grado de libertad).

Aplicando el método de Gauss al segundo sistema, considerando como parámetro u, $u = t$:

z	y	x	
$\boxed{-8}$	0	0	$-16 - 16t$
10	-12	0	$2 + 8t$
-8	10	2	$2 - 6t$
0	$\boxed{96}$	0	$144 + 96t$
0	-80	-16	$-144 - 80t$
0	0	$\boxed{-1536}$	-2304

El sistema equivalente en forma diagonal es:

$$\begin{cases} -8z = -16 - 16t \\ 96y = 144 + 96t \\ -1\,536x = -2\,304 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ z = \frac{16 + 16t}{8} = 2 + 2t; \qquad y = \frac{144 + 96t}{96} = \frac{3}{2} + t; \qquad x = \frac{2\,304}{1\,536} = \frac{3}{2}.$$

Las soluciones son $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2} + t$, $z = 2 + 2t$, $u = t$, para todo valor real de t.

e)

x	y	z	
$\boxed{8}$	1	4	9
5	-2	4	6
1	1	0	1
0	$\boxed{-21}$	12	3
0	7	-4	-1
0	0	$\boxed{0}$	0

El sistema equivalente en forma triangular es:

$$\begin{cases} 8x + y + 4z = 9 \\ -21y + 12z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -21y + 12z = 3, \\ y + 8x + 4z = 9. \end{cases}$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 2$; el rango de la matriz ampliada A^+ es $r^+ = 2$. Por el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado (con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad).

Aplicando el método de Gauss al segundo sistema, considerando como parámetro z, $z = t$:

y	x	
$\boxed{-21}$	0	$3 - 12t$
1	8	$9 - 4t$
0	$\boxed{-168}$	$-192 + 96t$

El sistema equivalente en forma diagonal es:

$$\begin{cases} -21y = 3 - 12t \\ -168x = -192 + 96t \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ y = \frac{3 - 12t}{-21} = \frac{-1 + 4t}{7}; \qquad x = \frac{-192 + 96t}{-168} = \frac{8 - 4t}{7}.$$

Las soluciones son $x = \frac{8 - 4t}{7}$, $y = \frac{-1 + 4t}{7}$, $z = t$, para todo valor real de t.

f)

x	y	z	
$\boxed{1}$	1	1	1
1	1	1	3
0	$\boxed{0}$	0	2

El sistema equivalente en forma triangular es:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 1$; el rango de la matriz ampliada A^+ es $r^+ = 2$. Según el teorema de Rouché, al ser $r = 1 \neq 2 = r^+$, el sistema es incompatible.

Nota: No es necesario determinar los rangos de las matrices A y A^+ para observar que el sistema es incompatible; la proposición falsa $0 = 2$ indica que es incompatible. (Las propias ecuaciones del sistema señalan que es incompatible, porque la suma de tres números, $x + y + z$, no puede ser a la vez 1 y 3.)

g)

x	y	z	
$\boxed{1}$	2	3	1
1	−1	1	0
1	−3	−1	2
3	4	3	3
0	$\boxed{-3}$	−2	−1
0	−5	−4	1
0	−2	−6	0
0	0	$\boxed{2}$	−8
0	0	14	−2
0	0	$\boxed{0}$	108

El sistema equivalente en forma triangular es:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ \quad - 3y - 2z = -1, \\ \qquad\quad 2z = -8, \\ \qquad\quad 0 = 108. \end{cases}$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 3$; el rango de la matriz ampliada A^+ es $r^+ = 4$. Por el teorema de Rouché, al ser $r = 3 \neq 4 = r^+$, el sistema es incompatible.

Nota: Basta observar que se ha obtenido la proposición falsa $0 = 108$ para determinar que el sistema es incompatible.

h)

x	y	
$\boxed{2}$	−1	2
2	−2	1
2	1	2
1	5	1
0	$\boxed{-2}$	−2
0	4	0
0	11	0
0	$\boxed{0}$	8
0	0	22
0	$\boxed{0}$	0

El sistema equivalente en forma triangular es:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ \quad - 2y = -2 \\ \qquad 0 = 8 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2, \\ \qquad y = 1, \\ \qquad 0 = 8. \end{cases}$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 2$; el rango de la matriz ampliada A^+ es $r^+ = 3$. Según el teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

Nota: Para determinar que el sistema es incompatible basta observar que se ha obtenido la proposición falsa $0 = 8$.

i)

x	y	z	
$\boxed{3}$	3	2	4
0	3	2	0
3	3	2	8
0	$\boxed{9}$	6	0
0	0	0	12
0	0	$\boxed{0}$	108

El sistema equivalente en forma triangular es:

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 4, \\ \qquad 9y + 6z = 0, \\ \qquad\qquad 0 = 108. \end{cases}$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 2$; el rango de la matriz ampliada A^+ es $r^+ = 3$. Por el teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible.

Nota: Basta observar que se ha obtenido la proposición falsa $0 = 108$ para determinar que el sistema es incompatible. (Las propias ecuaciones del sistema indican que es incompatible, porque $3x + 3y + 2z$ no puede ser a la vez 4 y 8.)

j)

x	y	z	
$\boxed{1}$	3	1	0
3	1	1	0
2	6	-5	0
0	$\boxed{-8}$	-2	0
0	0	-7	0
0	0	$\boxed{56}$	0

El sistema homogéneo equivalente en forma triangular es:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0, \\ - 8y - 2z = 0, \\ 56z = 0. \end{cases}$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 3$. Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 3 = n$, el sistema es incompatible.

El sistema admite únicamente la solución trivial $x = y = z = 0$.

k)

x	y	z	
$\boxed{1}$	-2	3	0
2	0	-3	0
3	-2	0	0
0	$\boxed{4}$	-9	0
0	4	-9	0
0	0	$\boxed{0}$	0

El sistema homogéneo equivalente en forma triangular es:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 4y - 9z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4y - 9z = 0, \\ -2y + x + 3z = 0. \end{cases}$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 2$. De acuerdo con el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado (con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad).

Aplicando el método de Gauss al segundo sistema, considerando como parámetro z, $z = t$:

y	x	
$\boxed{4}$	0	9t
-2	1	-3t
0	$\boxed{4}$	6t

El sistema equivalente en forma diagonal es:

$$\begin{cases} 4y = 9t \\ 4x = 6t \end{cases} \rightarrow y = \frac{9t}{4}; \quad x = \frac{6t}{4} = \frac{3t}{2}.$$

Las soluciones son $x = \dfrac{3t}{2}$, $y = \dfrac{9t}{4}$, $z = t$, para todo valor real de t.

real de t.

l)

x	y	z	u	
$\boxed{1}$	1	-1	-1	0
1	-1	1	1	0
1	-1	-1	-1	0
1	1	-1	1	0
0	$\boxed{-2}$	2	2	0
0	-2	0	0	0
0	0	0	2	0
0	0	$\boxed{4}$	4	0
0	0	0	-4	0
0	0	0	$\boxed{-16}$	0

El sistema homogéneo equivalente, expresado en forma triangular es:

$$\begin{cases} x + y - z - u = 0, \\ - 2y + 2z + 2u = 0, \\ 4z + 4u = 0, \\ - 16u = 0. \end{cases}$$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 4$. Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 4 = n$, el sistema es incompatible.

El sistema propuesto admite únicamente la solución trivial $x = y = z = u = 0$.

TEMA I-5.2. —————— Dependencia lineal en R^3 Aplicaciones lineales

Ejercicios resueltos

1. *Indicar para qué valores de* t *los vectores* **u** = (1, 1, 1), **v** = (2, 2, t) *y* **w** = (t, 0, 0) *no forman una base de* R^3.

   (Propuesto en la Univ. de Santiago.)

   Si los vectores **u**, **v** y **w** no forman una base de R^3, son linealmente dependientes y, en consecuencia:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & t \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & t & 0 \end{vmatrix} = 0 \to t^2 - 2t = 0 \to t(t-2) = 0 \to \begin{cases} t = 0 \to t_1 = 0; \\ t - 2 = 0 \to t_2 = 2. \end{cases}$$

2. *Dada la aplicación lineal entre* R^3 *y* R^2: $f(x, y, z) = (x, y)$, *(proyección sobre el plano* Oxy*), determinar la matriz asociada. Hallar la imagen de* (1, 2, 3).

   Aplicando la condición del enunciado a los vectores de la base canónica de R^3:

$$f(1, 0, 0) = (1, 0); \quad f(0, 1, 0) = (0, 1); \quad f(0, 0, 1) = (0, 0).$$

La matriz asociada a f es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (x', y').$

La imagen de (1, 2, 3) es: $(1, 2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1 + 0 + 0, 0 + 2 + 0) = (1, 2).$

3. *Sea la aplicación lineal* $f: R^3 \to R^2$, *definida por* $f(1, 0, 0) = (1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (1, 0)$ *y* $f(0, 0, 1) = (1, 2)$. *Calcular su imagen y su núcleo.*

La matriz asociada es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (x', y').$

$\left.\begin{matrix} x' = x + y + z \\ y' = x + 2z \end{matrix}\right\}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Como $r = 2 \neq 3 = n$, por el teorema de Rouché, el sistema es *compatible* y, por tanto, todo elemento (par) de R^2 tiene original (terna) en R^3 y la imagen es todo R^2:

$$\text{im } f = R^2.$$

El núcleo es el conjunto de vectores de R^3 cuya imagen es (0, 0); por tanto:

$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{matrix}\right\} \text{ sistema homogéneo donde: } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to r = 2.$$

Como $r = 2 \neq 3 = n$, por el teorema de Rouché, es sistema *compatible (indeterminado)*. Considerando como parámetro $z = t$:

$$\left.\begin{matrix} x + y = -t \\ x = -2t \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y = -t - x = -t + 2t = t \\ x = -2t \end{matrix}\right\} \to \ker f = [(-2t, t, t), \forall t \in R].$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Probar que R^2 es un espacio vectorial sobre el cuerpo R.

Se considera el conjunto $R^2 = \{(x,y) : x \in R \text{ e } y \in R\}$ de pares ordenados de números reales que verifica la siguiente relación de igualdad:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c,\ b = d.$$

En el conjunto R^2 se consideran la operación interna adición (+) y la operación externa multiplicación ($\cdot$) sobre el cuerpo R (multiplicación de elementos de R^2 por elementos —escalares— de R), definidas así:

Adición: $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d) \in R^2$, $\forall (a,b) \in R^2$ y $\forall (c,d) \in R^2$.

Multiplicación: $\lambda \cdot (a,b) = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b) \in R^2$, $\forall (a,b) \in R^2$ y $\forall \lambda \in R$.

Se comprueba que tales operaciones cumplen las propiedades que definen en el conjunto R^2 la estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo R. En efecto:

1) La operación interna adición verifica las propiedades:

- Uniforme: $\forall (a,b) \in R^2$ y $\forall (c,d) \in R^2$ se verifica que

  $$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d) \in R^2 \text{ es un elemento único,}$$

  de acuerdo con la propiedad uniforme de la adición en R.

- Asociativa: $\forall (a,b) \in R^2$, $\forall (c,d) \in R^2$ y $\forall (e,f) \in R^2$ se verifica que

  $$(a,b) + [(c,d) + (e,f)] = [(a,b) + (c,d)] + (e,f);$$

  en efecto, operando en los dos miembros, se tiene:

  $$(a,b) + [(c,d) + (e,f)] = (a,b) + (c + e, d + f) = (a + c + e, b + d + f),$$

  $$[(a,b) + (c,d)] + (e,f) = (a + c, b + d) + (e,f) = (a + c + e, b + d + f);$$

  es decir, ambas expresiones son iguales en virtud de la propiedad asociativa de la adición en R.

- Conmutativa: $\forall (a,b) \in R^2$ y $\forall (c,d) \in R^2$ se verifica que

  $$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c,d) + (a,b),$$

  de acuerdo con la propiedad conmutativa de la adición en R.

- Existencia de vector cero: $(0,0) \in R^2$ es el elemento neutro de la adición, tal que $\forall (a,b) \in R^2$ se verifica que

  $$(0,0) + (a,b) = (a,b) + (0,0) = (a,b),$$

  en virtud de la propiedad de $0 \in R$ como elemento neutro de la adición en R.

- Existencia de vector opuesto: $\forall (a,b) \in R^2$ existe un vector $(-a,-b) \in R^2$, que es su opuesto respecto de la adición, tal que

  $$(a,b) + (-a,-b) = (-a,-b) + (a,b) = (a - a, b - b) = (0,0),$$

  de acuerdo con la propiedad del elemento opuesto de la adición en R.

2) La operación externa multiplicación verifica las propiedades:

- Uniforme: $\forall (a,b) \in R^2$ y $\forall \lambda \in R$ se verifica que

  $$\lambda \cdot (a,b) = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b) \in R^2 \text{ es un elemento único,}$$

  de acuerdo con la propiedad uniforme de la multiplicación en R.

- $\forall (a,b) \in R^2$, $\forall \lambda \in R$ y $\forall \mu \in R$ se verifica que

$$(\lambda + \mu) \cdot (a,b) = [(\lambda + \mu) \cdot a, (\lambda + \mu) \cdot b] = (\lambda \cdot a + \mu \cdot a, \lambda \cdot b + \mu \cdot b) =$$
$$= (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b) + (\mu \cdot a, \mu \cdot b) = \lambda \cdot (a,b) + \mu \cdot (a,b),$$

en virtud de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición en R.

- $\forall (a,b) \in R^2$, $\forall \lambda \in R$ y $\forall \mu \in R$ se verifica que

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot (a,b) = (\lambda \cdot \mu \cdot a, \lambda \cdot \mu \cdot b) = \lambda \cdot (\mu \cdot a, \mu \cdot b) = \lambda \cdot [\mu \cdot (a,b)],$$

de acuerdo con la propiedad asociativa de la multiplicación en R.

- $\forall (a,b) \in R^2$, $\forall (c,d) \in R^2$ y $\forall \lambda \in R$ se verifica que

$$\lambda \cdot [(a,b) + (c,d)] = \lambda \cdot (a + c, b + d) = [\lambda \cdot (a + c), \lambda \cdot (b + d)] =$$
$$= (\lambda \cdot a + \lambda \cdot c, \lambda \cdot b + \lambda \cdot d) = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b) + (\lambda \cdot c, \lambda \cdot d) = \lambda \cdot (a,b) + \lambda \cdot (c,d),$$

en virtud de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición en R.

- $\forall (a,b) \in R^2$ se verifica que

$$1 \cdot (a,b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a,b),$$

de acuerdo con la propiedad del elemento unidad de la multiplicación en R.

Por tanto, R^2 es un espacio vectorial sobre el cuerpo R.

2. Demostrar que R^2 admite dimensión dos.

Basta comprobar que existen dos vectores de R^2 que forman una base de R^2.

Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ de R^2 forman una base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de R^2, ya que:

- Los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes; es decir, $k_1 \cdot \mathbf{e}_1 + k_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ sólo se cumple si $k_1 = k_2 = 0$.

  En efecto: $k_1 \cdot (1,0) + k_2 \cdot (0,1) = (k_1,0) + (0,k_2) = (k_1,k_2) = (0,0)$ sólo si $k_1 = k_2 = 0$.

- B es un sistema generador de R^2; es decir, cualquier vector $\mathbf{v} = (x,y) \in R^2$ se puede expresar como combinación lineal de los elementos de B, $\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \beta \cdot \mathbf{e}_2$.

  En efecto: $(x,y) = \alpha \cdot (1,0) + \beta \cdot (0,1) = (\alpha,0) + (0,\beta) = (\alpha,\beta) \rightarrow \alpha = x, \beta = y$.

Por tanto, R^2 es un espacio vectorial de dimensión dos.

Nota: Según el criterio establecido en el libro de teoría, la condición necesaria y suficiente para que los vectores (a,b) y (c,d) formen una base de R^2 es que el determinante formado por ellos sea distinto de cero.

Por consiguiente, los vectores (1,0) y (0,1) forman una base de R^2, porque $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$.

3. Los vectores (1, 1, 1), (0, 1, 1) y (0, 0, 1) de R^3, ¿forman una base?

La condición necesaria y suficiente para que los vectores (1,1,1), (0,1,1) y (0,0,1) formen una base de R^3 es que el valor del determinante que forman sea distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, dichos vectores forman una base de R^3.

4. ¿Forman una base los vectores (2, 1, 2), (3, 2, 3) y (5, 3, 5) de R^3?

Aplicando el criterio anterior, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 15 + 18 - 20 - 18 - 15 = 0.$$

Por tanto, dichos vectores no forman una base de R^3.

5. En el ejercicio anterior, ¿algún par de vectores es linealmente independiente?

Se estudian las tres posibles parejas que se pueden formar tomando de dos en dos los tres vectores del ejercicio anterior.

a) Para que los vectores (2,1,2) y (3,2,3) sean linealmente independientes la igualdad

$$k_1 \cdot (2,1,2) + k_2 \cdot (3,2,3) = (0,0,0)$$

sólo debe cumplirse para $k_1 = k_2 = 0$.

La igualdad anterior equivale al sistema homogéneo $\left\{\begin{array}{l} 2k_1 + 3k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 = 0 \\ 2k_1 + 3k_2 = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2k_1 + 3k_2 = 0, \\ k_1 + 2k_2 = 0. \end{array}\right.$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 2$. Según el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 = n$, el sistema es incompatible y únicamente admite la solución trivial $k_1 = k_2 = 0$.

Por tanto, los vectores (2,1,2) y (3,2,3) son linealmente independientes.

b) Para que los vectores (2,1,2) y (5,3,5) sean linealmente independientes la igualdad

$$k_1 \cdot (2,1,2) + k_2 \cdot (5,3,5) = (0,0,0)$$

ha de cumplirse sólo para $k_1 = k_2 = 0$.

La igualdad anterior equivale al sistema homogéneo $\left\{\begin{array}{l} 2k_1 + 5k_2 = 0 \\ k_1 + 3k_2 = 0 \\ 2k_1 + 5k_2 = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2k_1 + 5k_2 = 0, \\ k_1 + 3k_2 = 0. \end{array}\right.$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 2$. Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 = n$, el sistema es incompatible y solamente admite la solución trivial $k_1 = k_2 = 0$.

Por consiguiente, los vectores (2,1,2) y (5,3,5) son linealmente independientes.

c) Para que los vectores (3,2,3) y (5,3,5) sean linealmente independientes la igualdad

$$k_1 \cdot (3,2,3) + k_2 \cdot (5,3,5) = (0,0,0)$$

sólo debe cumplirse para $k_1 = k_2 = 0$.

La igualdad anterior equivale al sistema homogéneo $\left\{\begin{array}{l} 3k_1 + 5k_2 = 0 \\ 2k_1 + 3k_2 = 0 \\ 3k_1 + 5k_2 = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3k_1 + 5k_2 = 0, \\ 2k_1 + 3k_2 = 0. \end{array}\right.$

El rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 2$. Según el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 = n$, el sistema es incompatible y únicamente admite la solución trivial $k_1 = k_2 = 0$.

Por tanto, los vectores (3,2,3) y (5,3,5) son linealmente independientes.

Nota: Recuérdese que el conjunto $\{(2,1,2), (3,2,3), (5,3,5)\}$, formado por los tres vectores del ejercicio anterior, es linealmente dependiente.

6. Encontrar el valor de t para que el vector $\mathbf{x} = (3, 8, t)$ esté en el subespacio vectorial engendrado, en R^3, por los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Para que el vector **x** esté en el subespacio vectorial engendrado por los vectores **u** y **v** tiene que ser combinación lineal de ambos. Es decir, existen escalares α y β tales que $(3,8,t) = \alpha \cdot (1,2,3) + \beta \cdot (1,3,-1)$.

La igualdad anterior equivale a que el sistema $\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 3 \\ 2\alpha + 3\beta = 8 \\ 3\alpha - \beta = t \end{array}\right.$ sea compatible, para lo cual ha de cumplirse que sean iguales los rangos de la matriz A de los coeficientes y de la matriz ampliada A^+, de acuerdo con el teorema de Rouché.

Como el rango de la matriz A de los coeficientes es $r = 2$, para que el rango de la matriz ampliada A^+ sea $r^+ = 2$, ha de ser cero el determinante de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & t \end{vmatrix} = 3t + 24 - 6 - 27 + 8 - 2t = t - 1 = 0 \rightarrow t = 1 \rightarrow \mathbf{x} = (3,8,1).$$

Así pues, el vector $\mathbf{x} = (3,8,1)$ está en el subespacio vectorial engendrado por los vectores $\mathbf{u} = (1,2,3)$ y $\mathbf{v} = (1,3,-1)$.

7. Hallar en R^3 la ecuación del subespacio vectorial engendrado por los vectores $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ y $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$.

El subespacio vectorial engendrado por los vectores **a** y **b** es el conjunto de los vectores **v** que dependen linealmente de ambos; es decir, los vectores $\mathbf{v} = (x,y,z)$ tales que $(x,y,z) = \alpha \cdot (1,0,1) + \beta \cdot (1,1,0)$, para algún α y algún β.

La igualdad equivale al sistema $\left\{\begin{array}{l} x = \alpha + \beta, \\ y = \beta, \\ z = \alpha, \end{array}\right.$ que representa las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial, con $\alpha \in R$ y $\beta \in R$.

Si, como en el ejercicio anterior, se aplica el teorema de Rouché para establecer la condición para que el sistema sea compatible (que el rango de la matriz A de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada A^+ sean iguales), como $r = r^+ = 2$, el determinante de orden 3 ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + z + y - 0 - x - 0 = 0 \rightarrow -x + y + z = 0.$$

La ecuación $x - y - z = 0$ es la ecuación implícita del subespacio vectorial.

8. Demostrar que en R^3 los vectores de la forma (x, y, x) forman un subespacio vectorial de R^3.

Nota: Si $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in A$ y $k \in R$, basta probar que $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in A$ y que $k \cdot \mathbf{a} \in A$, siendo A el conjunto de los vectores.

Sea A el conjunto de los vectores de R^3 de la forma (x, y, x); es decir, aquellos vectores de R^3 que tienen iguales las coordenadas primera y tercera.

Sean dos vectores cualesquiera, pertenecientes a A, $\mathbf{a} = (x_1, y_1, x_1) \in A$ y $\mathbf{b} = (x_2, y_2, x_2) \in A$, y un número real, $k \in R$.

De acuerdo con el criterio expresado en la nota del ejercicio, se tiene:

1) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1, y_1, x_1) - (x_2, y_2, x_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, x_1 - x_2) \in A$, ya que el vector $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ tiene iguales las coordenadas primera y tercera.

2) $k \cdot \mathbf{a} = k \cdot (x_1, y_1, x_1) = (k \cdot x_1, k \cdot y_1, k \cdot x_1) \in A$, porque las coordenadas primera y tercera del vector $k \cdot \mathbf{a}$ son iguales.

9. Para el conjunto A del ejercicio anterior, encontrar la base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ para la cual:

$$\begin{cases} (5, 3, 5) = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 \\ (3, 2, 3) = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 \end{cases}$$

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Multiplicando los dos miembros de la primera ecuación por -1 y los de la segunda por 2 y sumando las ecuaciones resultantes, se obtiene:

$$\begin{cases} (5, 3, 5) = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 \\ (3, 2, 3) = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-5, -3, -5) = -2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 \\ (6, 4, 6) = 2\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 \end{cases} \rightarrow (1, 1, 1) = \mathbf{u}_2.$$

Despejando $\mathbf{u}_1$ en la segunda ecuación del primer sistema y sustituyendo en ella el valor de $\mathbf{u}_2$, se deduce:

$$\mathbf{u}_1 = (3, 2, 3) - 2\mathbf{u}_2 = (3, 2, 3) - 2 \cdot (1, 1, 1) = (3, 2, 3) - (2, 2, 2) = (1, 0, 1).$$

Hay que comprobar que $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ pertenecen al conjunto A y que $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base de A. En efecto:

1) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1) \in A$ y $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 1) \in A$, porque ambos vectores tienen iguales las coordenadas primera y tercera.

2) $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base de A, porque:

- Los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son linealmente independientes; es decir, $k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + k_2 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ sólo se cumple si $k_1 = k_2 = 0$.

  En efecto:

  $$k_1 \cdot (1, 0, 1) + k_2 \cdot (1, 1, 1) = (k_1, 0, k_1) + (k_2, k_2, k_2) = (k_1 + k_2, k_2, k_1 + k_2) = (0, 0, 0).$$

  La última igualdad equivale al sistema homogéneo $\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 = 0. \end{cases}$

  El sistema sólo admite la solución trivial $k_1 = k_2 = 0$. Por tanto, los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son linealmente independientes.

- B es un sistema generador de A; es decir, cualquier vector $\mathbf{v} = (x, y, x) \in A$ se puede expresar como combinación lineal de los elementos de B, $\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{u}_1 + \beta \cdot \mathbf{u}_2$.

  En efecto:

  $$(x, y, x) = \alpha \cdot (1, 0, 1) + \beta \cdot (1, 1, 1) = (\alpha, 0, \alpha) + (\beta, \beta, \beta) = (\alpha + \beta, \beta, \alpha + \beta).$$

Igualando las respectivas coordenadas, se tiene:

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \\ x = \alpha + \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = x - \beta \\ \beta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = x - y, \\ \beta = y. \end{cases}$$

Por consiguiente, queda probado que $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base de A.

10. Discutir para qué valores de a los vectores $\mathbf{u} = (a, 1, -2)$, $\mathbf{v} = (1, a, 2)$ y $\mathbf{w} = (2a, 1, 0)$ son linealmente independientes.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Para que los vectores **u, v** y **w** sean linealmente independientes la igualdad

$$k_1 \cdot \mathbf{u} + k_2 \cdot \mathbf{v} + k_3 \cdot \mathbf{w} = k_1 \cdot (a, 1, -2) + k_2 \cdot (1, a, 2) + k_3 \cdot (2a, 1, 0) = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$$

sólo ha de satisfacerse para $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

La igualdad anterior equivale al sistema homogéneo $\begin{cases} ak_1 + k_2 + 2ak_3 = 0, \\ k_1 + ak_2 + k_3 = 0, \\ -2k_1 + 2k_2 = 0. \end{cases}$

Para que los vectores **u, v** y **w** sean linealmente independientes el sistema homogéneo anterior ha de ser incompatible (únicamente ha de admitir la solución trivial $k_1 = k_2 = k_3 = 0$). Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, para que el sistema anterior sea incompatible, el rango de la matriz A de los coeficientes ha de ser $r = n = 3$; es decir, el determinante de la matriz A de los coeficientes debe ser distinto de cero. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2a \\ 1 & a & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 4a + 4a^2 - 2a - 0 = 4a^2 + 2a - 2 \neq 0.$$

Los vectores **u, v** y **w** son linealmente independientes para los valores de a que no son solución de la ecuación

$$4a^2 + 2a - 2 = 0 \rightarrow 2a^2 + a - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -1.$$

Por consiguiente, los vectores **u, v** y **w** son linealmente independientes para todo valor real de $a \neq \frac{1}{2}$ y $a \neq -1$.

11. Estudiar si son o no aplicaciones lineales de R^3 en R^3:

a) $f(x, y, z) = (x, 0, z)$;

b) $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$;

c) $f(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$.

Se comprueba en cada caso si las aplicaciones dadas cumplen, o no, las dos condiciones de la definición de aplicación lineal:

$$1)\ f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}). \qquad 2)\ f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = \lambda \cdot f(\mathbf{a}).$$

En los tres casos se considera $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$; por tanto:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot (x_1, y_1, z_1) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1).$$

a) 1) $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, 0, z_1 + z_2)$;

$f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) = (x_1, 0, z_1) + (x_2, 0, z_2) = (x_1 + x_2, 0, z_1 + z_2)$;

por consiguiente, $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$.

2) $f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = f(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1) = (\lambda \cdot x_1, 0, \lambda \cdot z_1)$;

$\lambda \cdot f(\mathbf{a}) = \lambda \cdot f(x_1, y_1, z_1) = \lambda \cdot (x_1, 0, z_1) = (\lambda \cdot x_1, 0, \lambda \cdot z_1)$;

por tanto, $f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = \lambda \cdot f(\mathbf{a})$.

Así pues, f es aplicación lineal de R^3 en R^3.

b) 1) $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$

$= (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$;

$f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) =$

$= (x_1, x_1 + y_1, x_1 + y_1 + z_1) + (x_2, x_2 + y_2, x_2 + y_2 + z_2) =$

$= (x_1 + x_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2)$;

por consiguiente, $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$.

2) $f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = f(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1 + \lambda \cdot z_1)$;

$\lambda \cdot f(\mathbf{a}) = \lambda \cdot f(x_1, y_1, z_1) = \lambda \cdot (x_1, x_1 + y_1, x_1 + y_1 + z_1) =$

$= [\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot (x_1 + y_1), \lambda \cdot (x_1 + y_1 + z_1)] =$

$= (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1 + \lambda \cdot z_1)$;

por tanto, $f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = \lambda \cdot f(\mathbf{a})$.

Así pues, f es aplicación lineal de R^3 en R^3.

c) 1) $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = [x_1 + x_2, (y_1 + y_2)^2, (z_1 + z_2)^3]$;

$f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1^2, z_1^3) + (x_2, y_2^2, z_2^3) =$

$= (x_1 + x_2, y_1^2 + y_2^2, z_1^3 + z_2^3)$;

como $(y_1 + y_2)^2 \neq y_1^2 + y_2^2$ y $(z_1 + z_2)^3 \neq z_1^3 + z_2^3$, $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \neq f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$.

Así pues, f no es aplicación lineal de R^3 en R^3.

12. Estudiar si son o no aplicaciones lineales de R^3 en R^2:

a) $f(x, y, z) = (x, y + z)$;

b) $f(x, y, z) = (x - y, x - z)$.

Se procede como en el ejercicio anterior y se utiliza la misma notación.

a) 1) $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$;

$f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1 + z_1) + (x_2, y_2 + z_2) =$

$= (x_1 + x_2, y_1 + z_1 + y_2 + z_2)$;

por consiguiente, $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$.

2) $f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = f(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1 + \lambda \cdot z_1)$;

$\lambda \cdot f(\mathbf{a}) = \lambda \cdot f(x_1, y_1, z_1) = \lambda \cdot (x_1, y_1 + z_1) = [\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot (y_1 + z_1)] =$

$= (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1 + \lambda \cdot z_1)$;

por tanto, $f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = \lambda \cdot f(\mathbf{a})$.

Así pues, f es aplicación lineal de R^3 en R^2.

b) 1) $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = [(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (z_1 + z_2)] =$

$= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, x_1 + x_2 - z_1 - z_2);$

$f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) = (x_1 - y_1, x_1 - z_1) + (x_2 - y_2, x_2 - z_2) =$

$= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, x_1 + x_2 - z_1 - z_2);$

por consiguiente, $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$.

2) $f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = f(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1) = (\lambda \cdot x_1 - \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot x_1 - \lambda \cdot z_1);$

$\lambda \cdot f(\mathbf{a}) = \lambda \cdot f(x_1, y_1, z_1) = \lambda \cdot (x_1 - y_1, x_1 - z_1) = [\lambda \cdot (x_1 - y_1), \lambda \cdot (x_1 - z_1)] =$

$= (\lambda \cdot x_1 - \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot x_1 - \lambda \cdot z_1);$

por tanto, $f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = \lambda \cdot f(\mathbf{a})$.

Así pues, f es aplicación lineal de R^3 en R^2.

13. Estudiar si son o no aplicaciones lineales de R^3 en R:

a) $f(x, y, z) = x + y - z;$

b) $f(x, y, z) = 2x - y + 3z;$

c) $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$.

Se procede igual que en los dos ejercicios anteriores y se utiliza la misma notación.

a) 1) $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 - z_1 - z_2;$

$f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) = x_1 + y_1 - z_1 + x_2 + y_2 - z_2 =$

$= x_1 + x_2 + y_1 + y_2 - z_1 - z_2;$

por consiguiente, $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$.

2) $f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = f(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1) = \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1 - \lambda \cdot z_1;$

$\lambda \cdot f(\mathbf{a}) = \lambda \cdot f(x_1, y_1, z_1) = \lambda \cdot (x_1 + y_1 - z_1) = \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1 - \lambda \cdot z_1;$

por tanto, $f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = \lambda \cdot f(\mathbf{a})$.

Así pues, f es aplicación lineal de R^3 en R.

b) 1) $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = 2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2 + 3z_1 + 3z_2;$

$f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) = 2x_1 - y_1 + 3z_1 + 2x_2 - y_2 + 3z_2 =$

$= 2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2 + 3z_1 + 3z_2;$

por consiguiente, $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$.

2) $f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = f(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1) = 2\lambda \cdot x_1 - \lambda \cdot y_1 + 3\lambda \cdot z_1;$

$\lambda \cdot f(\mathbf{a}) = \lambda \cdot f(x_1, y_1, z_1) = \lambda \cdot (2x_1 - y_1 + 3z_1) = 2\lambda \cdot x_1 - \lambda \cdot y_1 + 3\lambda \cdot z_1;$

por tanto, $f(\lambda \cdot \mathbf{a}) = \lambda \cdot f(\mathbf{a})$.

Así pues, f es aplicación lineal de R^3 en R.

c) 1) $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = e^{x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2};$

$f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) = e^{x_1 + y_1 + z_1} + e^{x_2 + y_2 + z_2};$

como $e^{x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2} \neq e^{x_1 + y_1 + z_1} + e^{x_2 + y_2 + z_2}$, $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \neq f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$.

Así pues, f no es aplicación lineal de R^3 en R.

14. Calcular la matriz de la aplicación lineal $f : R^3 \to R^3$, respecto a la base canónica, siendo:

$$f(1, 1, 1) = (3, 4, 5), f(0, 1, 1) = (2, 3, 4) \text{ y } f(0, 0, 1) = (1, 2, 3).$$

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz asociada a la aplicación lineal $f : R^3 \to R^3$, respecto a la base canónica, de manera que si (x, y, z) son las coordenadas de un vector, respecto a la base canónica, su imagen por f, referida también a la misma base, viene dada por la expresión:

$$f(x, y, z) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Para calcular los valores de los elementos a_{ij} se utilizan los datos del enunciado:

$$f(1, 1, 1) = (3, 4, 5) = (1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} = 3, \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} = 4, \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} = 5; \end{cases}$$

$$f(0, 1, 1) = (2, 3, 4) = (0, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \begin{cases} a_{21} + a_{31} = 2, \\ a_{22} + a_{32} = 3, \\ a_{23} + a_{33} = 4; \end{cases}$$

$$f(0, 0, 1) = (1, 2, 3) = (0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \begin{cases} a_{31} = 1, \\ a_{32} = 2, \\ a_{33} = 3. \end{cases}$$

Sustituyendo en el segundo grupo de ecuaciones los valores obtenidos en el tercer grupo, se obtiene:

$$a_{21} = 2 - a_{31} = 2 - 1 = 1; \quad a_{22} = 3 - a_{32} = 3 - 2 = 1; \quad a_{23} = 4 - a_{33} = 4 - 3 = 1.$$

Reemplazando en el primer grupo de ecuaciones los valores hallados, resulta:

$$a_{11} = 3 - a_{21} - a_{31} = 3 - 1 - 1 = 1; \quad a_{12} = 4 - a_{22} - a_{32} = 4 - 1 - 2 = 1;$$

$$a_{13} = 5 - a_{23} - a_{33} = 5 - 1 - 3 = 1.$$

La matriz de la aplicación lineal $f: R^3 \to R^3$, respecto a la base canónica, es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

15. Sea $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base canónica de R^2, y se consideran los vectores:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \text{ y } \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

a) Demostrar que $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ son bases de R^2.

b) Hallar los vectores de R^2 que coinciden con su imagen en la aplicación lineal f de R^2, con base U, en R^2, con base V, y definida por $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

a) 1) $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1); \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = (1, 0) - (0, 1) = (1, -1).$

La condición necesaria y suficiente para que $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ sea una base de R^2 es que el determinante formado por $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{u}_2 = (1, -1)$ sea distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$, $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base de R^2.

2) $v_1 = e_1 - e_2 = (1, 0) - (0, 1) = (1, -1)$; $\quad v_2 = e_1 + e_2 = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$.

Por la misma razón que en 1), como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$, $V = \{v_1, v_2\}$ es una base de R^2.

b) Sea **x** un vector cualquiera de R^2.

Si (x_1, x_2) son las coordenadas de **x** respecto de U, se tiene que $x = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2$.

Si (x_1, x_2) son las coordenadas de $f(x)$ respecto de V, resulta que $f(x) = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2$.

Que $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$, considerando en el espacio original la base U y en el espacio final la base V, indica que:

$$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2.$$

Sustituyendo v_1, v_2, u_1 y u_2 por sus expresiones, se deduce:

$$x_1 \cdot (1, -1) + x_2 \cdot (1, 1) = x_1 \cdot (1, 1) + x_2 \cdot (1, -1).$$

Igualando las respectivas coordenadas, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 = x_1 - x_2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ 2x_2 = 2x_1 \end{array} \right. \rightarrow x_1 = x_2.$$

Por consiguiente, los vectores de R^2 pedidos son los que tienen la forma (x, x); es decir, los que tienen sus dos coordenadas iguales.

16. Sea $f : R^3 \rightarrow R^2$ la aplicación lineal, definida por:

$$f(1, 0, 0) = (1, 1),\ f(0, 1, 0) = (2, 2) \text{ y } f(0, 0, 1) = (3, 3).$$

Calcular la imagen y el núcleo.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

1) La imagen de la aplicación lineal $f : R^3 \rightarrow R^2$ es el conjunto de los vectores $(x', y') \in R^2$ tales que $(x', y') = f(x, y, z)$. Es decir:

$$f(x, y, z) = f[x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)];$$

$$f(x, y, z) = x \cdot f(1, 0, 0) + y \cdot f(0, 1, 0) + z \cdot f(0, 0, 1);$$

$$f(x, y, z) = x \cdot (1, 1) + y \cdot (2, 2) + z \cdot (3, 3) = (x + 2y + 3z, x + 2y + 3z) = (x', y').$$

Igualando las respectivas coordenadas, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2y + 3z, \\ y' = x + 2y + 3z. \end{array} \right.$$

Para que un elemento (x', y') de R^2 tenga original (x, y, z) en R^3 el sistema ha de ser compatible.

Por el teorema de Rouché, para que el sistema sea compatible han de ser iguales los rangos de la matriz A de los coeficientes y de la matriz ampliada A^+.

Como el rango de la matriz A es $r = 1$, para que el rango de la matriz A^+ sea $r^+ = 1$, han de ser cero todos sus determinantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} x' & 1 \\ y' & 1 \end{vmatrix} = x' - y' = 0; \quad \begin{vmatrix} x' & 2 \\ y' & 2 \end{vmatrix} = 2x' - 2y' = 0; \quad \begin{vmatrix} x' & 3 \\ y' & 3 \end{vmatrix} = 3x' - 3y' = 0.$$

Las tres ecuaciones obtenidas se reducen a la ecuación $x' - y' = 0 \rightarrow x' = y'$.

Por tanto, la imagen de la aplicación lineal $f : R^3 \rightarrow R^2$ es el subespacio vectorial de R^2 formado por los vectores (x', x') que tienen iguales las coordenadas primera y segunda.

2) El núcleo de la aplicación lineal $f : R^3 \to R^2$ es el conjunto de los vectores $(x, y, z) \in R^3$ tales que $f(x, y, z) = (0, 0)$. Es decir:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \to \ x + 2y + 3z = 0,$$

que es la ecuación implícita del núcleo de f.

Resolviendo la ecuación, considerando como parámetros $z = s$ e $y = t$, resulta:

$$x = -2t - 3s, \quad y = t, \quad z = s, \quad \forall t \in R \text{ y } \forall s \in R,$$

que son las ecuaciones paramétricas del núcleo de f.

17. El homomorfismo $f: R^3 \to R^2$ está determinado por:

$$f(1, 0, 0) = (1, 0), f(0, 1, 0) = (-1, 0) \text{ y } f(0, 0, 1) = (0, 0).$$

Calcular su núcleo y su imagen.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

1) El núcleo del homomorfismo $f: R^3 \to R^2$ es el conjunto de los vectores $(x, y, z) \in R^3$ tales que $f(x, y, z) = (0, 0)$. Por tanto:

$$f(x, y, z) = f[x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)];$$

$$f(x, y, z) = x \cdot f(1, 0, 0) + y \cdot f(0, 1, 0) + z \cdot f(0, 0, 1);$$

$$f(x, y, z) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (-1, 0) + z \cdot (0, 0) = (x - y, 0) = (0, 0).$$

Igualando las respectivas coordenadas, se tiene:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \to \ x - y = 0,$$

que es la ecuación implícita del núcleo de f.

Resolviendo la ecuación, considerando como parámetros $z = s$ e $y = t$, se deduce:

$$x = t, \quad y = t, \quad z = s, \quad \forall t \in R \text{ y } \forall s \in R,$$

que son las ecuaciones paramétricas del núcleo de f.

2) La imagen del homomorfismo $f: R^3 \to R^2$ es el conjunto de los vectores $(x', y') \in R^2$ tales que $(x', y') = f(x, y, z)$. Es decir:

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 0. \end{cases}$$

Para que un elemento (x', y') de R^2 tenga original (x, y, z) en R^3 el sistema debe ser compatible.

Según el teorema de Rouché, para que el sistema sea compatible han de ser iguales los rangos de la matriz A de los coeficientes y de la matriz ampliada A^+.

Como el rango de la matriz A es $r = 1$, para que el rango de la matriz A^+ sea $r^+ = 1$, han de ser cero todos sus determinantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} x' & 1 \\ y' & 0 \end{vmatrix} = -y' = 0; \quad \begin{vmatrix} x' & -1 \\ y' & 0 \end{vmatrix} = y' = 0; \quad \begin{vmatrix} x' & 0 \\ y' & 0 \end{vmatrix} = 0 = 0.$$

Las tres ecuaciones que resultan se reducen a la ecuación $y' = 0$.

Por tanto, la imagen del homomorfismo $f: R^3 \to R^2$ es el subespacio vectorial de R^2 formado por los vectores $(x', 0)$ que tienen la segunda coordenada nula.

TEMA II-1.1. — Ecuaciones de la recta y del plano

Ejercicios resueltos

1. *Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto* A (0, 1, 2) *y es paralela a la recta* $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{5}$.

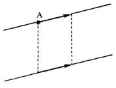
Un vector de dirección de la recta dada es (2, 3, 5).

Como la recta pedida es paralela a la dada, un vector de dirección de ella es, también, (2, 3, 5).

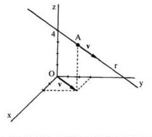
Dado que pasa por el punto A (0, 1, 2), las ecuaciones en forma continua son:

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{5} = \lambda \rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot \lambda \\ y = 3 \cdot \lambda + 1 \\ z = 5 \cdot \lambda + 2 \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas.



2. *Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto* A (2, 3, 4) *y tiene un vector de dirección* v (2, 3, 0).



Según la expresión (3), se tiene:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{0}.$$

Ahora bien, $\frac{z-4}{0}$ «no tiene sentido», ya que el denominador es cero.

En la figura se observa que *la coordenada z de todo punto de la recta es* 4; por lo que se consideran ecuaciones de la recta:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} \\ z = 4 \end{cases}$$

3. *Determinar las posiciones relativas de la recta* $\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}$ *respecto de los planos y de los ejes coordenados, según los distintos valores de* v_1, v_2 *y* v_3.

— Si $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ y $v_3 \neq 0$, es una *recta cualquiera*. En el caso en el que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, la recta *pasa por el origen de coordenadas;* su ecuación es $\frac{x}{v_1} = \frac{y}{v_2} = \frac{z}{v_3}$.

— Si una de las coordenadas del vector de dirección es cero, son rectas *paralelas a los planos coordenados:*

si $v_1 = 0$:

$$\begin{cases} \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3} \\ x = a_1 \end{cases}$$

paralela al plano Oyz

si $v_2 = 0$:

$$\begin{cases} \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{z-a_3}{v_3} \\ y = a_2 \end{cases}$$

paralela al plano Oxz

si $v_3 = 0$:

$$\begin{cases} \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} \\ z = a_3 \end{cases}$$

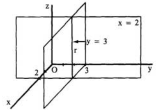
paralela al plano Oxy

— Si dos coordenadas del vector de dirección son iguales a cero, son rectas *paralelas a los ejes coordenados:*

si $v_1 = v_2 = 0$:	si $v_1 = v_3 = 0$:	si $v_2 = v_3 = 0$:
$\begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = a_1 \\ z = a_3 \end{cases}$	$\begin{cases} y = a_2 \\ z = a_3 \end{cases}$
paralela al eje Oz	paralela al eje Oy	paralela al eje Ox

Ejemplo: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ es una recta paralela al eje Oz, intersección de los planos $x = 2$ e $y = 3$.

(Véase la figura siguiente.)



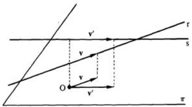
4. *Escribir la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas* $\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-8}{4}$ *y* $x = y = z$.

(Propuesto en la Univ. de Salamanca.)

Vectores directores de las rectas son (2, 3, 4) y (1, 1, 1), respectivamente.

Dado que el plano es paralelo a las rectas, lo es también a sus vectores directores. Luego, son vectores del plano (2, 3, 4) y (1, 1, 1). Como pasa por el origen (0, 0, 0), por (6) su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0.$$



Solución de los ejercicios propuestos

1. Determinar las ecuaciones, en forma paramétrica, continua y reducida de las rectas que pasan por el punto A y con un vector de dirección **v** dado:

a) $A(2, 1, -3)$, $\mathbf{v}(-1, 2, -2)$; *b)* $A(0, 0, 0)$, $\mathbf{v}(2, -1, -3)$.

a) 1) Ecuación continua: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{-2}$.

2) Igualando la ecuación continua a un parámetro λ y despejando x, y, z, se obtiene las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -\lambda + 2, \\ y = 2\lambda + 1, \\ z = -2\lambda - 3. \end{cases}$

3) Despejando x e y en función de z en la ecuación continua, se consigue la ecuación reducida:

$$\begin{cases} -2(x-2) = -(z+3) \\ -2(y-1) = 2(z+3) \end{cases} \to \begin{cases} -2x + 4 = -z - 3 \\ -2y + 2 = 2z + 6 \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{z}{2} + \dfrac{7}{2}, \\ y = -z - 2. \end{cases}$$

b) 1) Ecuación continua: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{-3}$.

2) Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -3\lambda. \end{cases}$

3) Ecuación reducida: $\begin{cases} -3x = 2z \\ -3y = -z \end{cases} \to \begin{cases} x = -\dfrac{2z}{3}, \\ y = \dfrac{z}{3}. \end{cases}$

2. Determinar dos puntos pertenecientes a las rectas:

a) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-3y}{3} = 1 - z$; *b)* $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -3z + 2 \end{cases}$

a) Dando dos valores cualesquiera al parámetro λ en la ecuación $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-3y}{3} = 1 - z = \lambda$, se obtienen las coordenadas de dos puntos de la recta.

$$\text{Para } \lambda = 0: \frac{x-1}{2} = \frac{2-3y}{3} = 1 - z = 0 \to \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2 - 3y = 0 \\ 1 - z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ 3y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \to$$

$$\to \text{ punto A } \left(1, \frac{2}{3}, 1\right);$$

$$\text{para } \lambda = 1: \frac{x-1}{2} = \frac{2-3y}{3} = 1 - z = 1 \to \begin{cases} x - 1 = 2 \\ 2 - 3y = 3 \\ 1 - z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3 \\ 3y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \to$$

$$\to \text{ punto B } \left(3, -\frac{1}{3}, 0\right).$$

b) Dando dos valores cualesquiera a la coordenada z en las dos ecuaciones, se consiguen las coordenadas de dos puntos de la recta.

$$\text{Para } z = 0: \begin{cases} x = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\ y = -3 \cdot 0 + 2 = 2 \end{cases} \rightarrow \text{ punto } A(-1,2,0);$$

$$\text{para } z = 1: \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = -3 + 2 = -1 \end{cases} \rightarrow \text{ punto } B(1,-1,1).$$

3. Escribir en forma paramétrica las rectas:

a) $\dfrac{x-1}{3} = y = \dfrac{2-z}{2}$; *b)* $x = y = z$.

Procediendo como en el apartado *a)* del ejercicio **1**, se obtienen las ecuaciones paramétricas:

a) $\begin{cases} x = 3\lambda + 1, \\ y = \lambda, \\ z = -2\lambda + 2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda. \end{cases}$

4. ¿Son paralelos los siguientes pares de vectores?:

a) (1, 2, 3), (0, 1, 2); *b)* (1, 1, 1), (2, 1, 2).

Para que dos vectores sean paralelos sus coordenadas respectivas han de ser proporcionales.

a) Como $\dfrac{0}{1} \neq \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{3}$, los vectores no son paralelos.

b) Al ser $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{2}$, los vectores tampoco son paralelos.

5. Hallar en cada caso, en forma paramétrica y general, la ecuación del plano que pasa por un punto A, que se señala, y con vectores **r** y **s**, que se indican, contenidos en el plano:

a) A(0, 1, 2), **r**(0, −1, 2), **s**(1, 3, 2); *b)* A(1, −1, 2), **r**(0, −1, −3), **s**(−1, 2, −3).

Siendo $A(a_1,a_2,a_3)$ un punto del plano y $\mathbf{r}(r_1,r_2,r_3)$ y $\mathbf{s}(s_1,s_2,s_3)$ dos vectores no paralelos contenidos en el plano, la ecuación vectorial de éste es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{r} + \mu\mathbf{s} \rightarrow (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(r_1,r_2,r_3) + \mu(s_1,s_2,s_3).$$

a) 1) Las ecuaciones paramétricas del plano son:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda r_1 + \mu s_1 \\ y = a_2 + \lambda r_2 + \mu s_2 \\ z = a_3 + \lambda r_3 + \mu s_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 + 0 + \mu \\ y = 1 - \lambda + 3\mu \\ z = 2 + 2\lambda + 2\mu \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \mu, \\ y = 1 - \lambda + 3\mu, \\ z = 2 + 2\lambda + 2\mu. \end{cases}$$

2) Las ecuaciones paramétricas del plano se pueden expresar mediante el sistema:

$$\begin{cases} \mu = x, \\ -\lambda + 3\mu = y - 1, \\ 2\lambda + 2\mu = z - 2. \end{cases}$$

Por el teorema de Rouché, para que el sistema anterior sea compatible y determinado el rango r de la matriz de los coeficientes y el rango r^+ de la matriz ampliada han de ser iguales al número de indeterminadas ($r = r^+ = n = 2$); por tanto, el determinante de orden 3 ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ -1 & 3 & y-1 \\ 2 & 2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 + 2(y-1) - 2x - 6x - 0 + (z-2) = 2y - 2 - 8x + z - 2 = 0.$$

Es decir, la ecuación general del plano es: $-8x + 2y + z - 4 = 0$.

b) Procediendo como en el apartado anterior, se tiene:

1) Ecuaciones paramétricas del plano: $\begin{cases} x = 1 + 0 - \mu \\ y = -1 - \lambda + 2\mu \\ z = 2 - 3\lambda - 3\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - \mu, \\ y = -1 - \lambda + 2\mu, \\ z = 2 - 3\lambda - 3\mu \end{cases}$

2) $\begin{cases} \quad\;\; - \mu = x - 1 \\ -\lambda + 2\mu = y + 1 \\ -3\lambda - 3\mu = z - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ -1 & 2 & y+1 \\ -3 & -3 & z-2 \end{vmatrix} =$

$$= 0 + 3(y+1) + 3(x-1) + 6(x-1) + 0 - (z-2) = 0.$$

Es decir, la ecuación general del plano es: $9x + 3y - z - 4 = 0$.

6. Obtener la ecuación implícita del plano determinado por el punto A(1, 2, 3) y los vectores **u**(1, −1, 4) y **v**(1, 1, −2).

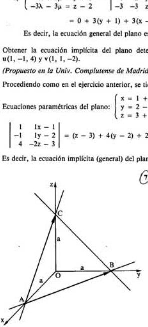
(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Procediendo como en el ejercicio anterior, se tiene:

Ecuaciones paramétricas del plano: $\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda + \mu \\ z = 3 + 4\lambda - 2\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = x - 1, \\ -\lambda + \mu = y - 2, \\ 4\lambda - 2\mu = z - 3. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 1 & y-2 \\ 4 & -2 & z-3 \end{vmatrix} = (z-3) + 4(y-2) + 2(x-1) - 4(x-1) + 2(y-2) + (z-3) = 0.$$

Es decir, la ecuación implícita (general) del plano es: $x - 3y - z + 8 = 0$.



7. Hallar la ecuación del plano que corta a los tres ejes coordenados en puntos situados a distancia *a* del origen.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Los puntos de corte del plano con los ejes coordenados son (véase la figura adjunta):

A(a,0,0); B(0,a,0); C(0,0,a).

Dos vectores del plano son:

AB = (0,a,0) − (a,0,0) = (−a,a,0);

AC = (0,0,a) − (a,0,0) = (−a,0,a).

Como $\frac{-a}{-a} \neq \frac{0}{a}$, los vectores **AB** y **AC** no son paralelos; por tanto, el plano queda determinado por el punto **A** y los vectores **AB** y **AC**, contenidos (punto y vectores) en el plano.

Ecuaciones paramétricas del plano: $\begin{cases} x = a - a\lambda - a\mu \\ y = 0 + a\lambda + 0 \\ z = 0 + 0 + a\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a\lambda - a\mu = x - a, \\ a\lambda \quad\quad = y, \\ \quad\quad a\mu = z. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -a & -a & x-a \\ a & 0 & y \\ 0 & a & z \end{vmatrix} = -0 - 0 + a^2(x-a) - 0 + a^2y + a^2z = 0.$$

Es decir, la ecuación general del plano es: $a^2x + a^2y + a^2z - a^3 = 0 \rightarrow x + y + z - a = 0.$

8. Pasar a la forma continua y hallar un vector de dirección de las rectas:

a) $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -z - 2 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$

a) Despejando la coordenada z en ambas ecuaciones e igualando las expresiones obtenidas, se halla la ecuación continua de la recta:

$$z = \frac{x+1}{2} = -y - 2 \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Por consiguiente, un vector de dirección de la recta es: $\mathbf{v}(2,-1,1)$.

b) Despejando la coordenada x y operando como en el apartado anterior, se obtiene la ecuación continua de la recta:

$$x = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{2} \rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{2}.$$

Por tanto, un vector director de la recta es: $\mathbf{u}(1,2,2)$.

9. Escribir las ecuaciones paramétricas de las dos rectas anteriores.

Procediendo como en el apartado *a)* del ejercicio **1**, se obtienen las ecuaciones paramétricas:

a) $\begin{cases} x = 2\lambda - 1, \\ y = -\lambda - 2, \\ z = \lambda. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x = \lambda, \\ y = 2\lambda + 3, \\ z = 2\lambda - 2. \end{cases}$

10. Pasar a la forma reducida la recta $\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$

Eliminando sucesivamente en ambas ecuaciones x e y, expresándolas en función de z, se tiene:

$$\begin{cases} -2x + 3y = z - 1 \\ 3x - 3y = \quad -6 \end{cases} \rightarrow x = z - 7; \quad \begin{cases} -2x + 3y = z - 1 \\ 2x - 2y = \quad -4 \end{cases} \rightarrow y = z - 5.$$

Es decir, la ecuación reducida de la recta es: $\begin{cases} x = z - 7, \\ y = z - 5. \end{cases}$

11. Obtener las coordenadas de un vector de dirección de la recta del ejercicio anterior.

Despejando la coordenada z en las dos ecuaciones e igualando las expresiones obtenidas, se halla la ecuación continua de la recta:

$$z = x + 7 = y + 5 \rightarrow \frac{x+7}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z}{1}.$$

Por tanto, un vector de dirección de la recta es: $\mathbf{v}(1,1,1)$.

12. Pasar a la forma continua la recta $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Eliminando la coordenada y entre ambas ecuaciones, se tiene: $\begin{cases} x - y = -z \\ \quad\;\; y = \;\; z \end{cases} \rightarrow x = 0.$

En este caso la ecuación de la recta se expresa: $\begin{cases} x = 0, \\ y = z. \end{cases}$

Nota: Se trata de la ecuación reducida de la recta. La ecuación continua de la recta es: $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Obsérvese que $\dfrac{x}{0}$ «no tiene sentido», ya que el denominador es cero.

13. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos $x + y - 5z + 4 = 0$ y $3x - y + 2z - 1 = 0$.

(Propuesto en la Univ. de Baleares.)

La ecuación de la recta es: $\begin{cases} x + y - 5z + 4 = 0, \\ 3x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$

Se halla primeramente la ecuación continua de la recta, expresando z en función de x (eliminando la coordenada y entre las dos ecuaciones) y en función de y (eliminando la coordenada x entre ambas ecuaciones) e igualando los dos valores de z:

$$\begin{cases} x + y = 5z - 4 \\ 3x - y = -2z + 1 \end{cases} \rightarrow 4x = 3z - 3 \rightarrow z = \frac{4x + 3}{3} = \frac{x + \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}};$$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 15z - 12 \\ -3x + y = 2z - 1 \end{cases} \rightarrow 4y = 17z - 13 \rightarrow z = \frac{4y + 13}{17} = \frac{y + \frac{13}{4}}{\frac{17}{4}};$$

la ecuación continua de la recta es: $\dfrac{x + \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{y + \frac{13}{4}}{\frac{17}{4}} = \dfrac{z}{1}$.

Igualando la ecuación continua a un parámetro λ y despejando x, y, z, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = \frac{3}{4}\lambda - \frac{3}{4}, \quad y = \frac{17}{4}\lambda - \frac{13}{4}, \quad z = \lambda.$$

14. Calcular la ecuación de un plano que contenga al punto P(1, 1, 1) y sea paralelo a las rectas

$$r \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

Se halla en primer lugar un vector de dirección de cada una de las rectas.

La ecuación continua de la recta r $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ y = 2z - 4 \end{cases}$ es: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{\frac{1}{2}}$; por tanto, un vector

de dirección de la recta r es: $\mathbf{u}\left(2, 1, \dfrac{1}{2}\right)$ o bien $\mathbf{v}(4,2,1)$.

Un vector director de la recta s $\begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ es: $\mathbf{w}(1,-1,1)$.

Dado que el plano es paralelo a las rectas r y s, también lo es a sus respectivos vectores de dirección **v** y **w**; es decir, **v** y **w** son vectores del plano. Por tanto, el plano queda determinado por el punto P y los vectores **v** y **w**.

Ecuaciones paramétricas del plano: $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda + \mu \\ y = 1 + 2\lambda - \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4\lambda + \mu = x - 1, \\ 2\lambda - \mu = y - 1, \\ \lambda + \mu = z - 1. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & x-1 \\ 2 & -1 & y-1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = -4(z-1) + (y-1) + 2(x-1) + (x-1) - 4(y-1) - 2(z-1) = 0.$$

Es decir, la ecuación general del plano es: $3x - 3y - 6z + 6 = 0 \rightarrow x - y - 2z + 2 = 0$.

Nota: Las dos rectas pueden cortarse o cruzarse, pero no pueden ser paralelas ni coincidentes, ya que en los dos últimos casos se obtendría la identidad $0 = 0$, por existir en el determinante dos líneas proporcionales (pueden ser dos líneas iguales).

15. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1, 1, 2) y es paralelo a las rectas

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ y - z = -3 \end{cases}$$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Procediendo como en el ejercicio anterior, se tiene:

La ecuación continua de la recta $\begin{cases} x = -\dfrac{y}{3} \\ x = -\dfrac{z}{4} \end{cases}$ es: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{-4}$; por tanto, un vector director

de la primera recta es: $\mathbf{u}(1,-3,-4)$.

La ecuación continua de la recta $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = z - 3 \end{cases}$ es: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{1}$; por consiguiente, un

vector de dirección de la segunda recta es: $\mathbf{v}(1,1,1)$.

El plano queda determinado por el punto (1,1,2) y los vectores **u** y **v**.

Ecuaciones paramétricas del plano: $\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 1 - 3\lambda + \mu \\ z = 2 - 4\lambda + \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = x - 1, \\ -3\lambda + \mu = y - 1, \\ -4\lambda + \mu = z - 2. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -3 & 1 & y-1 \\ -4 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = (z-2) - 4(y-1) - 3(x-1) + 4(x-1) - (y-1) + 3(z-2) = 0.$$

Es decir, la ecuación general del plano es: $x - 5y + 4z - 4 = 0$.

16. Obtener las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1, 2, 2) y es paralela a la recta

$$\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

Se halla en primer lugar un vector de dirección de la recta dada.

La ecuación continua de la recta $\begin{cases} z = x + 1 \\ z = \dfrac{y-1}{2} \end{cases}$ es: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$; por tanto, un vector de dirección de la recta es: $\mathbf{u}(1,2,1)$.

Como la recta pedida es paralela a la dada, un vector director de ella es también $\mathbf{u}\ (1,2,1)$ y, al pasar por el punto $A(1,2,2)$, su ecuación continua es:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1} \rightarrow x - 1 = \frac{y-2}{2} = z - 2.$$

17. Obtener las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Si, para hallar un vector director de la recta dada, se pretende determinar la ecuación continua de dicha recta, operando como en el ejercicio **13**, se tiene:

$$\begin{cases} x - y = z \\ x + y = -z \end{cases} \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0; \qquad \begin{cases} -x + y = -z \\ x + y = -z \end{cases} \rightarrow 2y = -2z \rightarrow z = -y.$$

Es decir, la ecuación continua de la recta es: $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$; por tanto, un vector de dirección de la recta es: $\mathbf{u}(0,-1,1)$.

Al ser la recta pedida paralela a la dada, un vector director de ella es también $\mathbf{u}(0,-1,1)$ y, por pasar por el origen, su ecuación continua es:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-0}{1} \rightarrow \frac{x}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Obsérvese que se trata de la misma recta dada, $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

Nota: Como $\dfrac{x}{0}$ «no tiene sentido», en este caso la ecuación de la recta se expresa como aparece en el enunciado o en la forma reducida, $\begin{cases} x = 0, \\ y = -z. \end{cases}$

Se llegaría al mismo resultado teniendo en cuenta que las coordenadas del origen satisfacen la ecuación de la recta dada (la recta dada pasa por el origen) y que por un punto sólo se puede trazar una recta paralela a otra. Es decir, la recta que se busca es la recta dada o, dicho de otra forma, la recta dada y la recta pedida son la misma recta.

18. Investigar si son paralelos los planos de cada apartado:

a) $x - y + z = 0, x - y = 0;$ *b)* $x + y = 0, x = 2.$

Para que dos planos sean paralelos el sistema formado por sus ecuaciones ha de ser incompatible.

a) Se trata de un sistema homogéneo, con $m = 2$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, el rango de la matriz de los coeficientes es $r = 2$.

Por el teorema de Rouché para sistemas homogéneos, al ser $r = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible (indeterminado), con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad, y admite infinitas soluciones, que dependen de un parámetro, soluciones que representan todos los puntos de la recta común a los dos planos.

Es decir, los planos no son paralelos; se cortan en la recta $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$

b) Se trata de un sistema con $m = 2$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas (recuérdese que son planos en el espacio).

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$ y el de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado, con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad, y admite infinitas soluciones, dependientes de un parámetro, soluciones que representan todos los puntos de la recta común a los dos planos.

Por tanto, los planos no son paralelos; se cortan en la recta $\begin{cases} x + y = 0, \\ x = 2. \end{cases}$

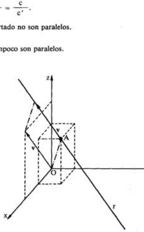
Se puede resolver también el problema sabiendo que dos planos dados, $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, son paralelos si los coeficientes de x, y, z en sus ecuaciones son, respectivamente, proporcionales; es decir, si se verifica:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

a) Como $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{1}$, los planos de este apartado no son paralelos.

b) Al ser $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$, los planos de este apartado tampoco son paralelos.

19. **Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1, 1, 2) y es paralela al vector v(2, 0, 3). Dibujar la recta.**



Un vector de dirección de la recta pedida es **v**(2,0,3), por ser paralela a dicho vector.

Como, además, la recta pasa por el punto A(1,1,2), su ecuación continua es:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{3}.$$

Como $\frac{y-1}{0}$ «no tiene sentido», la ecuación de la recta se expresa:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}, \\ y - 1 = 0. \end{cases}$$

Se trata de la recta r de la figura.

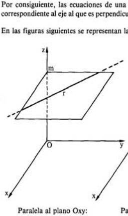
20. Plantear las ecuaciones de rectas que sean paralelas a los planos Oxy, Oxz, Oyz. Dibujar las rectas.

Las rectas paralelas a los planos coordenados están contenidas en éstos o en planos paralelos a ellos y son, por tanto, perpendiculares al eje de coordenadas que no pertenece al plano coordenado al que son paralelas.

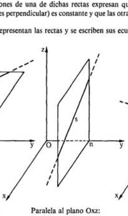
Por ejemplo, si una recta es paralela al plano Oxy está contenida en éste o en un plano paralelo a él y es perpendicular al eje Oz.

Por consiguiente, las ecuaciones de una de dichas rectas expresan que una de las coordenadas (la correspondiente al eje al que es perpendicular) es constante y que las otras dos son función una de otra.

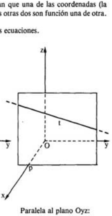
En las figuras siguientes se representan las rectas y se escriben sus ecuaciones.



Paralela al plano Oxy:



Paralela al plano Oxz:



Paralela al plano Oyz:

$$r: \begin{cases} z = m, \\ ax + by = c. \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y = n, \\ dx + ez = f. \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = p, \\ gy + hz = i. \end{cases}$$

Si las rectas r, s y t estuvieran contenidas, respectivamente, en los planos Oxy, Oxz y Oyz, sus correspondientes ecuaciones serían:

$$r: \begin{cases} z = 0, \\ ax + by = c; \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y = 0, \\ dx + ez = f; \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = 0, \\ gy + hz = i. \end{cases}$$

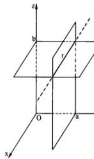
Nota: En el ejercicio **3** de los **ejercicios resueltos** de este mismo tema se ha planteado la solución de este problema con un razonamiento diferente.

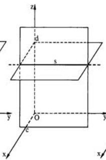
21. Plantear las ecuaciones de rectas que sean paralelas a los ejes coordenados.

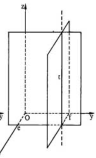
Las rectas paralelas a un eje de coordenadas son perpendiculares a los otros dos ejes y las ecuaciones de dichas rectas se expresan por la intersección de dos planos perpendiculares a los ejes a los que no son paralelas.

Por ejemplo, si una recta es paralela al eje Ox, es perpendicular a los ejes Oz y Oy.

En las figuras siguientes se representan las rectas y se escriben sus ecuaciones.







Paralela al eje Ox: $r: \begin{cases} y = a, \\ z = b. \end{cases}$

Paralela al eje Oy: $s: \begin{cases} x = c, \\ z = d. \end{cases}$

Paralela al eje Oz: $t: \begin{cases} x = e, \\ y = f. \end{cases}$

Nota: En el ejercicio **3** de los **ejercicios resueltos** de este mismo tema también se ha planteado, con un razonamiento distinto, la solución de este problema.

22. ¿Cuáles son las ecuaciones de los ejes coordenados?

Las ecuaciones de los ejes coordenados son:

$$\text{Eje Ox: } \begin{cases} y = 0, \\ z = 0; \end{cases} \quad \text{eje Oy: } \begin{cases} x = 0, \\ z = 0; \end{cases} \quad \text{eje Oz: } \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

23. ¿Qué ecuaciones tienen los planos coordenados?

Las ecuaciones de los planos coordenados son:

$$\text{Plano Oxy: } z = 0; \quad \text{plano Oxz: } y = 0; \quad \text{plano Oyz: } x = 0.$$

24. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$, es paralelo al vector de extremos A(2, 0, 0) y B(0, 1, 0) y pasa por el punto A.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

El plano (π) pedido queda determinado por el punto A(2,0,0), un vector de dirección de la recta (r) dada y otro vector **AC**, siendo C un punto cualquiera de la recta r.

La recta r tiene un vector director **u**(2,3,1) y pasa por el punto C(1,1,0).

El vector **AC** = (1,1,0) − (2,0,0) = (−1,1,0).

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi : x + y - 5z - 2 = 0.$$

No se ha tenido en cuenta la hipótesis del problema que impone la condición de que el plano π sea paralelo al vector **AB**. Ahora bien, si un plano es paralelo a un vector y contiene a uno de sus extremos (caso del presente ejercicio, ya que el plano contiene al extremo A), debe contener también al otro extremo. Por tanto, las coordenadas de B han de verificar la ecuación del plano para que la hipótesis sea cierta.

Como $0 + 1 - 5 \cdot 0 - 2 = -1 \neq 0$, la hipótesis del enunciado es falsa; es decir, el plano π no es paralelo al vector **AB**.

25 Dados los puntos A(1, 0, 2), B(0, 1, 3), C(−1, 2, 0) y D(2, −1, 3), hallar la ecuación del plano que contiene a la recta que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta que pasa por los puntos C y D.

(Propuesto en la Univ. del País Vasco.)

El plano (π) queda determinado por el punto A(1,0,2), un vector de dirección de la recta que pasa por los puntos A y B y un vector director de la recta definida por los puntos C y D.

Un vector director de la recta AB es: $\mathbf{AB} = (0,1,3) - (1,0,2) = (-1,1,1)$.

Un vector de dirección de la recta CD es: $\mathbf{CD} = (2,-1,3) - (-1,2,0) = (3,-3,3)$.

Es decir, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi\colon 6x + 6y - 6 = 0 \rightarrow \pi\colon x + y - 1 = 0.$$

26 Sean las rectas $\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda \cdot (2, 1, -1)$ y $\mathbf{x} = \mu \cdot (3, 0, 1)$. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo a ambas rectas.

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

El plano (π) queda determinado por el punto O(0,0,0) y un vector de dirección de cada una de las rectas.

Un vector director de la primera recta (r) es: $\mathbf{u}(2,1,-1)$.

Un vector de dirección de la segunda recta es: $\mathbf{v}(3,0,1)$.

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi\colon x - 5y - 3z = 0.$$

TEMA II-1.2. ——— Problemas de incidencia y de paralelismo

Ejercicios resueltos

1. *Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto* $(-1, 2, 0)$ *y contiene a la recta*

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

El plano pertenece a la radiación de planos:

$$(x - 2y + z - 3) + \lambda \cdot (y + 3z - 5) = 0. \qquad \text{(I)}$$

Como el plano pasa por el punto $(-1, 2, 0)$, las coordenadas del punto cumplen dicha ecuación:

$$(-1 - 2 \cdot 2 + 0 - 3) + \lambda \cdot (2 + 3 \cdot 0 - 5) = 0 \rightarrow -8 - 3 \cdot \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{8}{3}.$$

Sustituyendo en (I):

$$x - 2y + z - 3 - \frac{8}{3}(y + 3z - 5) = 0 \rightarrow 3x - 6y + 3z - 9 - 8y - 24z + 40 = 0.$$

La ecuación del plano es $3x - 14y - 21z + 31 = 0$.

2. *Calcular los valores de* a *para que sean paralelas las rectas*

$$r\colon \frac{x-1}{a} = \frac{y}{2a} = \frac{z}{1} \quad y \quad s\colon \begin{cases} x = -t \\ y = -2 - 2t \\ z = -at \end{cases}$$

(Propuesto en la Univ. de León.)

Para que r y s sean paralelas deben tener las coordenadas de sus vectores de dirección proporcionales.

Vector director de r: $(a, 2a, 1)$. Vector director de s: $(-1, -2, -a)$. Luego:

$$\frac{a}{-1} = \frac{2a}{-2} = \frac{1}{-a} \rightarrow \begin{cases} a(-a) = 1 \cdot (-1) \rightarrow -a^2 = -1 \rightarrow a^2 = 1 \\ a(-2) = (-1)2a \rightarrow -2a = -2a \\ 2a(-a) = (-2) \cdot 1 \rightarrow -2a^2 = -2 \rightarrow a^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = +1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Para $a = +1$ y $a = -1$ las rectas r y s son paralelas.

3. *Estudiar si* r: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ *y* s: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$ *son coplanarias. En caso afirmativo hallar la ecuación del plano que las contiene.*

Dos rectas determinan un plano si son *paralelas* o *se cortan en un punto*.

La recta r tiene un vector de dirección $(1, -2, -1)$ y pasa por el punto $A(2, -2, 1)$.

La recta s tiene un vector director $(2, -1, 1)$ y pasa por el punto $B(-3, 2, 0)$. $\mathbf{AB}(-5, 4, -1)$.

Como $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{-1}{1}$, no son rectas paralelas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{No se cruzan.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Se cortan: son coplanarias.}$$

Los vectores de dirección de las rectas pertenecen al plano. Un punto del plano es un punto cualquiera de una de las rectas, por ejemplo el (2, −2, 1). Por consiguiente, la ecuación del plano determinado por las dos rectas dadas es [según (6) del tema **II-1.1**]:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \rightarrow (x-2)(-2-1) - (y+2)(1+2) + (z-1)(-1+4) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -3x - 3y + 3z - 3 = 0 \rightarrow x + y - z + 1 = 0.$$

4. *Siendo* r *la recta determinada por las ecuaciones* $\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$ *y* P *el plano definido por* $2x + y + mz = n$, *determinar* m *y* n, *de modo que:*

a) r *y* P *sean secantes;* b) r *y* P *sean paralelos;* c) r *esté contenida en* P.

(Propuesto en la UNED.)

a) Para que r y P sean incidentes en un punto tiene que ser compatible y determinado el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \\ 2x + y + mz = n \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow 7m + 23 \neq 0 \rightarrow m \neq -\frac{23}{7}.$$

Para todo $m \neq -\dfrac{23}{7}$ la recta y el plano se cortan en un punto.

b) Para que r y P sean paralelos el sistema tiene que ser incompatible. Luego, por el teorema de Rouché, deben ser: $r = 2$, $r^* = 3$, ya que el rango de la matriz de los coeficientes no puede ser menor que 2: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$

Por consiguiente, en esta situación se cumple:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 7m + 23 = 0 \rightarrow m = -\frac{23}{7}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow 7n - 9 \neq 0 \rightarrow n \neq \frac{9}{7}.$$

Para $m = -\dfrac{23}{7}$ y para todo $n \neq \dfrac{9}{7}$ la recta y el plano son paralelos.

c) Para que r esté contenida en P es preciso que el sistema sea compatible e indeterminado; para lo cual es necesario que $r = r^* = 2$.

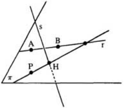
Para $m = -\dfrac{23}{7}$ y $n = \dfrac{9}{7}$ la recta está contenida en el plano.

5. *Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto* P(1, 1, 2) *y se apoya en las rectas*

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1} \;\; y \;\; s: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

En primer lugar se determina la ecuación del plano π que contiene al punto P y a la recta r. La ecuación viene expresada por el punto P(1, 1, 2) y dos puntos cualesquiera de r, por ejemplo, A(1, 0, 1) y B(4, 2, 0):



$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-1)(2+1) - (y-1)\cdot 3 + (z-2)\cdot 3 = 0.$$

$$\pi : 3x - 3y + 3z - 6 = 0 \rightarrow x - y + z - 2 = 0.$$

Se determina el punto H, intersección del plano π con la recta s; éste es el punto en el que se apoya la recta buscada en la recta s. Para ello se pasa la recta s a paramétricas y se sustituye en la ecuación del plano:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \rightarrow 2t - t + 2t - 1 - 2 = 0;\ 3t = 3;\ t = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 2\cdot 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 2\cdot 1 - 1 = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow$ H(2, 1, 1).

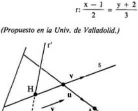
La recta buscada es la determinada por los puntos P(1, 1, 2) y H(2, 1, 1):

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{1-1} = \frac{z-2}{1-2}, \text{ es decir: } \begin{cases} x - 1 = 2 - z \\ y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + z = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

6. *Hallar las ecuaciones de una recta paralela al vector* (1, 2, 3) *y que corte a las rectas*

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1} \quad y \quad r': \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)



La recta r tiene un vector de dirección **u**(2, 3, 1) y pasa por el punto A(1, –2, 0).

Se determina el plano π que contiene a la recta r y al vector **v**(1, 2, 3); es decir, el plano fijado por el punto A(1, –2, 0) —uno cualquiera de r— y los vectores **u**(2, 3, 1) y **v**(1, 2, 3):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 7x - 5y + z - 17 = 0.$$

Se calcula el punto H, intersección del plano con la recta r':

$$\begin{cases} 7x - 5y + z - 17 = 0 \\ x = 2z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 7(2z+1) - 5(-z+2) + z - 17 = 0 \rightarrow 20z = 20 \rightarrow z = 1;\ x = 3;\ y = 1 \rightarrow H(3, 1, 1).$$

La recta s buscada es la que pasa por el punto H(3, 1, 1) y tiene un vector de dirección $\mathbf{v}(1, 2, 3)$:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \quad \rightarrow \quad s: x - 3 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Obtener las ecuaciones de los lados del triángulo de vértices (0, 1, 2), (–2, 1, 3) y (1, –3, –2).

La ecuación de una recta que pasa por dos puntos, $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$, es:

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1} = \frac{y-a_2}{b_2-a_2} = \frac{z-a_3}{b_3-a_3}.$$

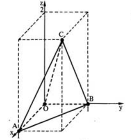
Por tanto, las ecuaciones de los lados del triángulo de vértices A(0,1,2), B(–2,1,3) y C(1,–3,–2) son:

- Ecuación del lado AB: $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-1}{1-1} = \frac{z-2}{3-2} \rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = z - 2;$

como $\frac{y-1}{0}$ «no tiene sentido», la ecuación del lado AB se expresa: $\begin{cases} \frac{x}{-2} = z - 2, \\ y - 1 = 0. \end{cases}$

- Ecuación del lado AC: $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{-3-1} = \frac{z-2}{-2-2} \rightarrow x = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-2}{-4}.$

- Ecuación del lado BC: $\frac{x+2}{1+2} = \frac{y-1}{-3-1} = \frac{z-3}{-2-3} \rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-3}{-5}.$



2. Hallar las ecuaciones de las caras del tetraedro de vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (1, 1, 2).

La ecuación de un plano que pasa por tres puntos no alineados, $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ y $C(c_1,c_2,c_3)$, es:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto, las ecuaciones de las caras de un tetraedro de vértices O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0) y C(1,1,2) son:

- Ecuación de la cara ABC: $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 1-0 & 0-0 \\ 1-1 & 1-0 & 2-0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + 2y - z - 2 = 0.$

- Ecuación de la cara OAB: $\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z = 0.$

Nota: En la figura se observa que el plano OAB es el plano coordenado Oxy. Repárese que, en efecto, la ecuación del plano OAB es la de dicho plano coordenado.

• Ecuación de la cara OAC: $\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 0-0 \\ 1-0 & 1-0 & 2-0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2y - z = 0.$

• Ecuación de la cara OBC: $\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0-0 \\ 1-0 & 1-0 & 2-0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - z = 0.$

3. Dados los puntos A(1, 0, 4), B(3, 0, 1), C(2, 0, 0) y D(0, 4, 0), analizar si son o no coplanarios.

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

Cuatro puntos del espacio tridimensional son coplanarios si uno de ellos verifica la ecuación del plano determinado por los otros tres.

Se halla, pues, la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C y se comprueba si el punto D está en dicho plano; es decir, si sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano.

Los puntos A, B y C no están alineados, ya que $\dfrac{2-1}{3-1} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{0-4}{1-4} = \dfrac{4}{3}$; por tanto:

Ecuación del plano ABC: $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-4 \\ 3-1 & 0-0 & 1-4 \\ 2-1 & 0-0 & 0-4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5y = 0 \rightarrow y = 0.$

El punto D(0,4,0) no está en el plano ABC, ya que $4 \neq 0$. Por consiguiente, los cuatro puntos dados no son coplanarios.

4. Obtener la condición para que sean coplanarios los puntos (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1) y (a, b, c).

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Ha de cumplirse que las coordenadas del punto (a,b,c) verifiquen la ecuación del plano π determinado por los puntos (1,0,1), (1,1,0) y (0,1,1), puntos que no están alineados.

Ecuación del plano π: $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 1-1 & 1-0 & 0-1 \\ 0-1 & 1-0 & 1-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + y + z - 2 = 0.$

Es decir, la condición para que los cuatro puntos sean coplanarios es: $a + b + c - 2 = 0$.

5. Obtener las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (0, 1, 2) y es paralela a la recta

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = 2z - 1.$$

La ecuación continua de la recta dada es: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$; por tanto, un vector director de la recta dada es: $\mathbf{u}\left(3, 2, \dfrac{1}{2}\right)$ o bien $\mathbf{v}(6,4,1)$.

Como la recta pedida es paralela a la dada, un vector de dirección de ella es también $\mathbf{v}(6,4,1)$ y, al pasar por el punto (0,1,2), su ecuación continua es:

$$\frac{x-0}{6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{1} \rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y-1}{4} = z - 2.$$

6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (−1, −3, 0) y es paralela a la recta

$$\begin{cases} x = z + 2 \\ y = z - 3 \end{cases}$$

La ecuación continua de la recta $\begin{cases} z = x - 2 \\ z = y + 3 \end{cases}$ es: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{1}$; por tanto, un vector director de la recta dada es: $\mathbf{u}(1,1,1)$.

El vector $\mathbf{u}(1,1,1)$ es también un vector de dirección de la recta pedida, por ser paralela a la dada. Como la recta pedida pasa por el punto (−1,−3,0), su ecuación continua es:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-0}{1} \rightarrow x + 1 = y + 3 = z.$$

7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 0, −1) y es paralela a la recta

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Se halla primeramente la ecuación continua de la recta dada, expresando z en función de x (eliminando la coordenada y entre las dos ecuaciones) y en función de y (eliminando la coordenada x entre ambas ecuaciones) e igualando los dos valores de z:

$$\begin{cases} 2x + 2y = -2z + 6 \\ 2x - 2y = -z + 1 \end{cases} \rightarrow 4x = -3z + 7 \rightarrow z = \frac{4x-7}{-3} = \frac{x - \frac{7}{4}}{-\frac{3}{4}};$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = -2z + 6 \\ -2x + 2y = z - 1 \end{cases} \rightarrow 4y = -z + 5 \rightarrow z = \frac{4y-5}{-1} = \frac{y - \frac{5}{4}}{-\frac{1}{4}};$$

la ecuación continua de la recta dada es: $\dfrac{x - \frac{7}{4}}{-\frac{3}{4}} = \dfrac{y - \frac{5}{4}}{-\frac{1}{4}} = \dfrac{z}{1}$; por tanto, un vector director

de la recta dada es: $\mathbf{u}\left(-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{4}, 1\right)$ o bien $\mathbf{v}(-3,-1,4)$.

El vector $\mathbf{v}(-3,-1,4)$ es también un vector de dirección de la recta pedida, por ser paralela a la dada. Al pasar la recta pedida por el punto (1,0,−1), su ecuación continua es:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+1}{4} \rightarrow \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{4}.$$

8. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1,2,−2) y es paralelo al plano de ecuación

$$-x - 2y + 3z - 7 = 0.$$

La condición de paralelismo de dos planos, $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, es:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Por otra parte, la ecuación de la radiación de planos que pasan por un punto $A(a_1,a_2,a_3)$ es:

$$a(x - a_1) + b(y - a_2) + c(z - a_3) = 0.$$

Por tanto, la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,2,-2)$ es:

$$a(x - 1) + b(y - 2) + c(z + 2) = 0.$$

Como este plano y el dado, $-x - 2y + 3z - 7 = 0$, son paralelos ha de cumplirse:

$$\frac{a}{-1} = \frac{b}{-2} = \frac{c}{3} \rightarrow a = -\alpha, b = -2\alpha, c = 3\alpha.$$

Sustituyendo a, b y c en la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,2,-2)$, se obtiene:

$$-\alpha(x - 1) - 2\alpha(y - 2) + 3\alpha(z + 2) = 0.$$

Simplificando por α, ya que $\alpha \neq 0$, se halla la ecuación del plano pedido:

$$-x + 1 - 2y + 4 + 3z + 6 = 0 \rightarrow -x - 2y + 3z + 11 = 0.$$

9. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Se obtienen dos puntos cualesquiera de la recta dada, puntos que están contenidos en el plano cuya ecuación se desea hallar, ya que la recta está contenida en el plano.

Para ello se dan en la ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} = \lambda$ dos valores cualesquiera al parámetro λ.

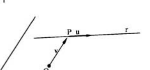
Para $\lambda = 0$: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow$ punto $A(1,1,1)$;

para $\lambda = 1$: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} = 1 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \\ y - 1 = 3 \\ z - 1 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases} \rightarrow$ punto $B(3,4,5)$;

Se trata, pues, de hallar la ecuación de un plano que pasa por tres puntos, $O(0,0,0)$, $A(1,1,1)$ y $B(3,4,5)$, que no están alineados. Por tanto, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 - 0 & 1 - 0 & 1 - 0 \\ 3 - 0 & 4 - 0 & 5 - 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0.$$

Puede hallarse también la ecuación del plano π pedido determinando dos vectores **u** y **v**, no paralelos, contenidos en el plano π y sabiendo que el plano π pasa por el origen.



El vector $\mathbf{u}(2,3,4)$ es el vector director de la recta dada r y el vector $\mathbf{v} = \mathbf{OP}$ está definido por un punto cualquiera P de dicha recta y el origen.

Como un punto cualquiera de la recta dada r es el punto $P(1,1,1)$, el vector es $\mathbf{v}(1,1,1)$. Es decir, el plano pedido π queda determinado por el punto $O(0,0,0)$ y los vectores $\mathbf{u}(2,3,4)$ y $\mathbf{v}(1,1,1)$. Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -x + 2y - z = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0.$$

10. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1, 0, 0) y contiene a la recta $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. de Valencia.)

Dando dos valores cualesquiera al parámetro λ en la ecuación de la recta contenida en el plano, se hallan dos puntos cualesquiera de la recta, puntos que también están contenidos en el plano.

Para $\lambda = 0$: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow$ punto A(2,3,4); para $\lambda = 1$: $\begin{cases} x = 2 + 1 = 3 \\ y = 3 - 3 = 0 \\ z = 4 + 2 = 6 \end{cases} \rightarrow$ punto B(3,0,6).

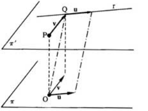
Se trata, pues, de determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos (1,0,0), (2,3,4) y (3,0,6), que no están alineados. Es decir, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 2-1 & 3-0 & 4-0 \\ 3-1 & 0-0 & 6-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 18x + 2y - 6z - 18 = 0 \rightarrow 9x + y - 3z - 9 = 0.$$

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo al plano determinado por el punto (1, −1, 0) y la recta que pasa por el punto (2, 2, 2) y tiene por vector director (1, 2, 3).

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)



El plano π' es el determinado por el punto P(1,−1,0) y la recta r que pasa por el punto Q(2,2,2) y tiene por vector director **u**(1,2,3).

El vector $\mathbf{v} = \mathbf{PQ} = (2,2,2) - (1,-1,0) = (1,3,2)$ pertenece al plano π'.

El plano π pedido queda determinado por el punto O(0,0,0) y los vectores **u** y **v**, ya que dichos vectores pertenecen también al plano π por ser éste paralelo al π'.

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -5x + y + z = 0 \rightarrow 5x - y - z = 0.$$

12. En el espacio R^3 se dan las rectas r y r'. Investigar si son o no coplanarias y, en su caso, hallar el punto de intersección.

$$r: \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = 3z + 2 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = z + 4 \\ y = 2z + 7 \end{cases}$$

Dos rectas r y r' de R^3 son coplanarias si se cortan en un punto o si son paralelas.

- Para que las rectas se corten en un punto el sistema formado por sus ecuaciones ha de ser compatible y determinado.

$$\begin{cases} x = 2z + 1 = z + 4 \\ y = 3z + 2 = 2z + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2z - z = 4 - 1 \\ 3z - 2z = 7 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 3, \\ z = 5. \end{cases}$$

Como $3 \neq 5$, el sistema es incompatible; es decir, las rectas no se cortan.

- Para que las rectas sean paralelas las coordenadas de sus vectores de dirección han de ser proporcionales.

Se determina un vector de dirección de cada una de las rectas, hallando la ecuación continua de cada una de ellas.

$$r: \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = 3z + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{x-1}{2} \\ z = \dfrac{y-2}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1} \rightarrow \mathbf{u}(2,3,1);$$

$$r': \begin{cases} x = z + 4 \\ y = 2z + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = x - 4 \\ z = \dfrac{y-7}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z}{1} \rightarrow \mathbf{u}'(1,2,1).$$

Como $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{1}{1}$, los vectores de dirección no son proporcionales y las rectas no son paralelas.

Por tanto, las rectas no son coplanarias (son rectas que se cruzan, sin puntos comunes).

Nota: Dadas las ecuaciones paramétricas de las rectas r y r′,

$$r: \begin{cases} x = a_1 + u_1\lambda \\ y = a_2 + u_2\lambda \\ z = a_3 + u_3\lambda \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = a_1' + u_1'\lambda \\ y = a_2' + u_2'\lambda \\ z = a_3' + u_3'\lambda, \end{cases}$$

la condición para que las rectas se crucen es:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_1' & a_1' - a_1 \\ u_2 & u_2' & a_2' - a_2 \\ u_3 & u_3' & a_3' - a_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En el presente ejercicio las ecuaciones paramétricas de las rectas r y r′ son:

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 3\lambda + 2 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = \lambda + 4 \\ y = 2\lambda + 7 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4-1 \\ 3 & 2 & 7-2 \\ 1 & 1 & 0-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 5 + 9 - 6 - 10 - 0 = -2 \neq 0$, las rectas se cruzan.

Es decir, las rectas no son coplanarias.

13. Estudiar las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas. En su caso, hallar las coordenadas del punto común.

a) r: $x = y = z$ y s: $2x + 1 = 2y = 2z + 2$;

b) r: $x - 1 = y - 2 = \dfrac{z-3}{3}$ y s: $\dfrac{x-1}{3} = y - 2 = \dfrac{z-3}{2}$.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

a) La recta r tiene un vector de dirección $\mathbf{u}(1,1,1)$ y pasa por el punto $O(0,0,0)$.

La ecuación continua de la recta s es: $\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y}{\frac{1}{2}} = \dfrac{z+1}{\frac{1}{2}}$; por tanto, tiene un vector director $\mathbf{v}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ o bien $\mathbf{w}(1,1,1)$ y pasa por el punto $A\left(-\frac{1}{2},0,-1\right)$.

Como $\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{1}$, los vectores de dirección son proporcionales y las rectas son paralelas o coincidentes.

Para que sean coincidentes un punto cualquiera de la recta r ha de pertenecer a la s; es decir, las coordenadas del punto han de satisfacer la ecuación de la recta s.

Se prueba si las coordenadas del punto $O(0,0,0)$, perteneciente a la recta r, verifican la ecuación de la s:

$$2\cdot 0+1 \neq 2\cdot 0 \neq 2\cdot 0+2 \;\rightarrow\; 1 \neq 0 \neq 2.$$

Por tanto, las rectas r y s no son coincidentes; son dos rectas coplanarias y paralelas.

b) La recta r tiene un vector de dirección $\mathbf{u}(1,1,3)$ y pasa por el punto $A(1,2,3)$.

La recta s tiene un vector director $\mathbf{v}(3,1,2)$ y pasa por el punto $A(1,2,3)$.

Como $\frac{1}{3}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{3}{2}$, los vectores de dirección no son proporcionales y las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\text{Como}\begin{vmatrix}1 & 3 & 1-1\\ 1 & 1 & 2-2\\ 3 & 2 & 3-3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix} = 0, \text{ las rectas se cortan.}$$

Es decir, las rectas r y s son coplanarias y se cortan en el punto $A(1,2,3)$.

14. Determinar la posición relativa de las rectas r_1: $x=-y=-z$ y r_2: $\begin{cases} z=2\\ y=x+\sqrt{2}\end{cases}$

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

La recta r_1 tiene un vector de dirección $\mathbf{u}_1(1,-1,-1)$ y pasa por el punto $O(0,0,0)$.

La ecuación continua de la recta r_2 se puede escribir: $\dfrac{x+\sqrt{2}}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{0}$; por tanto, tiene un vector director $\mathbf{u}_2(1,1,0)$ y pasa por el punto $A(-\sqrt{2},0,2)$.

Como $\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{1}$, los vectores de dirección no son proporcionales y las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\text{Como}\begin{vmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}-0\\ -1 & 1 & 0-0\\ -1 & 0 & 2-0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix} = 2-\sqrt{2}+2 = 4-\sqrt{2}\neq 0, \text{ las rectas se cruzan.}$$

Es decir, las rectas r_1 y r_2 no son coplanarias y se cruzan.

Nota: En la ecuación continua de la recta r_2 aparece $\frac{z-2}{0}$ que «no tiene sentido», ya que el denominador es cero. Sin embargo, es una forma práctica de hallar la tercera componente del vector director de la recta r_2. Dicho vector puede hallarse observando que todos los puntos de la recta r_2 tienen la coordenada $z = 2$ y que, por tanto, su vector director es paralelo al plano coordenado Oxy, con lo que su tercera componente es cero.

15. Determinar la posición relativa de las rectas

$$r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = -z \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

La ecuación continua de la recta r es: $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$; por tanto, tiene un vector de dirección $\mathbf{u}(1,-1,1)$ y pasa por el punto $A(-1,0,0)$.

Eliminando la coordenada y entre las dos ecuaciones de la recta s, se tiene:

$$\begin{cases} x + y = -z - 1 \\ x - y = z + 1 \end{cases} \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0; \quad y = -x - z - 1 = -z - 1 = \frac{z+1}{-1}.$$

Es decir, la ecuación de la recta s se expresa: $\begin{cases} x = 0, \\ \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}. \end{cases}$

Por tanto, la recta s tiene un vector director $\mathbf{v}(0,1,-1)$ y pasa por el punto $B(0,0,-1)$.

Como los vectores $\mathbf{u}(1,-1,1)$ y $\mathbf{v}(0,1,-1)$ no son proporcionales, las rectas no son paralelas ni coincidentes.

Al ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0+1 \\ -1 & 1 & 0-0 \\ 1 & -1 & -1-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 - 1 = -1 \neq 0$, las rectas se cruzan.

Es decir, las rectas r y s no son coplanarias y se cruzan.

16. Determinar a para que las rectas r y s se corten. ¿Pueden ser coincidentes?

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+a}{2} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

1) La recta r tiene un vector de dirección $\mathbf{u}(2,-1,2)$ y pasa por el punto $A(3,3,-a)$.

La recta s tiene un vector director $\mathbf{v}(4,3,5)$ y pasa por el punto $B(1,-1,-4)$.

La condición para que las rectas se corten es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1-3 \\ -1 & 3 & -1-3 \\ 2 & 5 & -4+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & a-4 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, $6(a-4) - 32 + 10 + 12 + 40 + 4(a-4) = 0 \rightarrow 10a - 10 = 0 \rightarrow a = 1$.

Para que las rectas r y s se corten ha de ser $a = 1$.

2) Para que las rectas r y s fueran coincidentes tendrían que ser paralelas.

Como $\frac{2}{4} \neq \frac{-1}{3} \neq \frac{2}{5}$, los vectores de dirección no son proporcionales y las rectas no son paralelas ni, por tanto, coincidentes (independientemente del valor de a).

Se podría resolver también el problema sabiendo que para que dos rectas se corten el sistema formado por sus ecuaciones ha de ser compatible y determinado; es decir, las ecuaciones de las dos rectas han de tener la misma solución única. Por tanto:

1) Sustituyendo las coordenadas x, y, z de la recta s en la ecuación de la recta r, se tiene:

$$\frac{(1+4t)-3}{2} = \frac{(-1+3t)-3}{-1} = \frac{(-4+5t)+a}{2} \rightarrow 2t-1 = -3t+4 = \frac{5t-4+a}{2}.$$

Resolviendo la ecuación $2t-1=-3t+4$, se obtiene:

$$2t-1=-3t+4 \rightarrow 2t+3t=4+1 \rightarrow 5t=5 \rightarrow t=1.$$

Sustituyendo el valor $t=1$ en la ecuación $2t-1=\frac{5t-4+a}{2}$ y resolviéndola, se deduce:

$$2-1=\frac{5-4+a}{2} \rightarrow 2=1+a \rightarrow a=1.$$

Es decir, las rectas r y s se cortan si $a=1$.

17. Averiguar para qué valor de m se cortan las rectas

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{5} \quad y \quad \begin{cases} x+2y+z-m=0 \\ 2x-y-z+2=0 \end{cases}$$

Hallar el punto de corte.

(Propuesto en la Univ. del País Vasco.)

1) La primera recta tiene un vector de dirección $\mathbf{u}(2,3,5)$ y pasa por el punto $A(1,-1,4)$.

Se halla la ecuación continua de la segunda recta, expresando z en función de x (eliminando la coordenada y entre las dos ecuaciones) y en función de y (eliminando la coordenada x entre ambas ecuaciones) e igualando los dos valores de z.

$$\begin{cases} x+2y=-z+m \\ 4x-2y=2z-4 \end{cases} \rightarrow 5x=z+m-4 \rightarrow z=\frac{5x-m+4}{1}=\frac{x-\frac{m-4}{5}}{\frac{1}{5}};$$

$$\begin{cases} 2x+4y=-2z+2m \\ -2x+y=-z+2 \end{cases} \rightarrow 5y=-3z+2m+2 \rightarrow z=\frac{5y-2m-2}{-3}=\frac{y-\frac{2m+2}{5}}{-\frac{3}{5}};$$

la ecuación continua de la segunda recta es: $\dfrac{x-\frac{m-4}{5}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{y-\frac{2m+2}{5}}{-\frac{3}{5}}=\dfrac{z}{1}$;

por tanto, tiene un vector director $\mathbf{v}\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{5},1\right)$ o bien $\mathbf{w}(1,-3,5)$ y pasa por el punto $B\left(\frac{m-4}{5},\frac{2m+2}{5},0\right)$.

La condición para que las rectas se corten es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \frac{m-4}{5}-1 \\ 3 & -3 & \frac{2m+2}{5}+1 \\ 5 & 5 & 0-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \frac{m-9}{5} \\ 3 & -3 & \frac{2m+7}{5} \\ 5 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, $24 + (2m + 7) + 3(m - 9) + 3(m - 9) - 2(2m + 7) + 12 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -25 + 4m = 0 \rightarrow m = \dfrac{25}{4}$.

Para que ambas rectas se corten ha de ser $m = \dfrac{25}{4}$.

2) Para hallar el punto de corte, solución común a las ecuaciones de ambas rectas, se sustituyen las coordenadas x, y, z de las ecuaciones paramétricas de la primera recta en cualquiera de las ecuaciones de la segunda recta, se calcula el parámetro λ y se hallan las coordenadas del punto de corte.

Las ecuaciones paramétricas de la primera recta son: $\begin{cases} x = 2\lambda + 1, \\ y = 3\lambda - 1, \\ z = 5\lambda + 4. \end{cases}$

Sustituyendo x, y, z en la segunda ecuación de la recta segunda, se obtiene:

$$2(2\lambda + 1) - (3\lambda - 1) - (5\lambda + 4) + 2 = 0 \rightarrow -4\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{4}.$$

El punto de corte es: $P(2\lambda + 1, 3\lambda - 1, 5\lambda + 4)$ para $\lambda = \dfrac{1}{4}$.

El decir, el punto de corte es: $P\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{21}{4}\right)$.

18. Sean las rectas r: $\begin{cases} 5z = \lambda \cdot (x - 3) + 10 \\ 5y = x + 2 \end{cases}$ y s: $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y}{\lambda} = \dfrac{z-1}{2}$.

Demostrar que se cruzan para todo valor de λ.

Se halla la ecuación continua de la recta r, despejando x en sus dos ecuaciones e igualando los valores obtenidos:

$$5z = \lambda x - 3\lambda + 10 \rightarrow x = \frac{5z + 3\lambda - 10}{\lambda} = \frac{z + \dfrac{3\lambda - 10}{5}}{\dfrac{\lambda}{5}};$$

$$5y = x + 2 \rightarrow x = \frac{5y - 2}{1} = \frac{y - \dfrac{2}{5}}{\dfrac{1}{5}};$$

la ecuación continua de la recta r es: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - \dfrac{2}{5}}{\dfrac{1}{5}} = \dfrac{z + \dfrac{3\lambda - 10}{5}}{\dfrac{\lambda}{5}}$;

por tanto, tiene un vector director $\mathbf{u}\left(1, \frac{1}{5}, \frac{\lambda}{5}\right)$ o bien $\mathbf{v}(5,1,\lambda)$ y pasa por el punto $A\left(0, \frac{2}{5}, -\frac{3\lambda - 10}{5}\right)$.

La recta s tiene un vector de dirección $\mathbf{w}(-5,\lambda,2)$ y pasa por el punto $B(1,0,1)$.

La condición para que las rectas se crucen es:

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 - 1 \\ 1 & \lambda & \frac{2}{5} - 0 \\ \lambda & 2 & \frac{10 - 3\lambda}{5} - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 1 & \lambda & \frac{2}{5} \\ \lambda & 2 & \frac{5 - 3\lambda}{5} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Desarrollando el determinante, se obtiene:

$$\lambda(5 - 3\lambda) - 2\lambda - 2 + \lambda^2 - 4 + (5 - 3\lambda) = -2\lambda^2 - 1.$$

Como el valor del determinante es distinto de cero, ya que para cualquier valor real de λ (positivo o negativo) $-2\lambda^2 - 1$ es menor que cero, las rectas r y s se cruzan para todo valor (real) de λ.

Se podría también resolver el problema sabiendo que si el sistema formado por sus ecuaciones es incompatible, las dos rectas se cruzan o son paralelas. Comprobado que el sistema es incompatible, hay que determinar que las rectas no son paralelas.

Las ecuaciones paramétricas de la recta s son: $\begin{cases} x = -5t + 1, \\ y = \lambda t, \\ z = 2t + 1. \end{cases}$

Sustituyendo x, y, z en las ecuaciones de la recta r, se tiene:

$$\begin{cases} 5(2t + 1) = \lambda(-5t + 1) - 3\lambda + 10 \rightarrow 5t(2 + \lambda) = 5 - 2\lambda \rightarrow t = \dfrac{5 - 2\lambda}{5(2 + \lambda)}, \\[2ex] 5\lambda t = -5t + 1 + 2 \rightarrow 5t(\lambda + 1) = 3 \rightarrow t = \dfrac{3}{5(\lambda + 1)}. \end{cases}$$

Para que el sistema sea compatible y determinado (es decir, para que las rectas se corten en un punto) los dos valores de t han de ser iguales:

$$\frac{5 - 2\lambda}{5(2 + \lambda)} = \frac{3}{5(\lambda + 1)} \rightarrow (5 - 2\lambda)(\lambda + 1) = 3(2 + \lambda) \rightarrow -2\lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}.$$

Como el valor obtenido para λ no es real, las rectas r y s no se cortan; por tanto, el sistema formado por las ecuaciones de las rectas es incompatible y éstas se cruzan o son paralelas.

Hay que investigar si los vectores de dirección, $\mathbf{v}(5,1,\lambda)$ y $\mathbf{w}(-5,\lambda,2)$, de las rectas r y s, hallados anteriormente, son o no proporcionales:

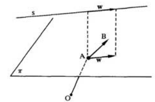
$$\begin{cases} \dfrac{5}{-5} = \dfrac{1}{\lambda} \rightarrow 5\lambda = -5 \rightarrow \lambda = -1, \\[2ex] \dfrac{5}{-5} = \dfrac{\lambda}{2} \rightarrow 10 = -5\lambda \rightarrow \lambda = -2. \end{cases}$$

Como $-1 \neq -2$, no existe valor (real) de λ para el que las rectas sean paralelas.

Por consiguiente, las rectas r y s se cruzan para todo valor (real) de λ.

19. Determinar λ para que la recta anterior s sea paralela al plano $2x + 3y - z + 1 = 0$.

Como la recta s del ejercicio anterior ha de ser paralela al plano π, un vector de dirección de ella, por ejemplo el $\mathbf{w}(-5,\lambda,2)$, está contenido en el plano.



El plano π queda, pues, determinado por los vectores $\mathbf{w}$ y $\mathbf{AB}$ y por el punto A, siendo A y B dos puntos cualesquiera del plano π.

Dando valores arbitrarios a x e y en la ecuación del plano y hallando los correspondientes de z, se hallan los dos puntos cualesquiera A y B.

Para $x = 0,\ y = 0 : -z + 1 = 0 \rightarrow z = 1 \rightarrow$ punto A(0,0,1);

para $x = 1,\ y = 0 : 2 - z + 1 = 0 \rightarrow z = 3 \rightarrow$ punto B(1,0,3).

El vector **AB** es: $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (1,0,3) - (0,0,1) = (1,0,2)$.

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ -5 & \lambda & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -5 & \lambda & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, $2\lambda x + 2y - \lambda(z - 1) + 10y = 0 \rightarrow 2\lambda x + 12y - \lambda z + \lambda = 0$.

Como el plano π y el plano dado son el mismo plano (son coincidentes), los coeficientes respectivos de las ecuaciones de ambos son proporcionales:

$$\frac{2\lambda}{2} = \frac{12}{3} = \frac{-\lambda}{-1} = \frac{\lambda}{1} \rightarrow \lambda = 4 = \lambda = \lambda.$$

La recta s: $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{2}$ es paralela al plano $2x + 3y - z + 1 = 0$.

Nota: Se simplifica el cálculo empleando el producto escalar, sabiendo que $\mathbf{v}(2,3,-1)$, vector cuyas componentes son los coeficientes de x, y, z de la ecuación del plano, es un vector asociado del plano, perpendicular a él y, por tanto, perpendicular al vector de dirección $\mathbf{w}(-5,\lambda,2)$ de la recta s, ya que éste está contenido en el plano.

Como los vectores **v** y **w** son perpendiculares, su producto escalar es nulo; es decir:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (2,3,-1) \cdot (-5,\lambda,2) = 2(-5) + 3\lambda + (-1)2 = 3\lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda = 4.$$

20. Para cada λ real se considera el plano π de ecuación:

$$(1 + 2 \cdot \lambda)x + (1 - \lambda)y + (1 + 3\lambda)z + 2 \cdot \lambda - 1 = 0.$$

Demostrar que todos los planos anteriores pasan por una recta r.

La ecuación de la radiación de planos se puede escribir:

$$x + 2\lambda x + y - \lambda y + z + 3\lambda z + 2\lambda - 1 = 0;$$

$$(x + y + z - 1) + \lambda(2x - y + 3z + 2) = 0.$$

La última ecuación indica que todos los planos de la radiación pasan por la recta r cuyas ecuaciones son: $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$

En efecto, cualquier punto de la recta r verifica la ecuación de la radiación de planos, ya que $0 + \lambda \cdot 0 = 0$.

21. Estudiar la posición relativa de la recta $\begin{cases} x = 3 \cdot \lambda - 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = 2 \cdot \lambda \end{cases}$ y el plano determinado por los puntos A(1, 3, 2), B(2, 0, 1) y C(1, 4, 3).

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

La ecuación del plano determinado por los puntos A, B y C es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 2-1 & 0-3 & 1-2 \\ 1-1 & 4-3 & 3-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, $-3(x-1) + (z-2) + (x-1) - (y-3) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow -2x - y + z + 3 = 0 \rightarrow 2x + y - z - 3 = 0.$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano, sustituyendo los valores x, y, z de las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano.

$$2(3\lambda - 1) + (\lambda + 2) - (2\lambda) - 3 = 0 \rightarrow 5\lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{3}{5}.$$

Como el sistema tiene solución única, la recta y el plano se cortan en un punto P cuyas coordenadas son:

$$x = 3\lambda - 1 = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}, \quad y = \lambda + 2 = \frac{3}{5} + 2 = \frac{13}{5},$$

$$z = 2\lambda = \frac{6}{5} \rightarrow P\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

22. Deducir la ecuación del plano que contiene a la recta r de ecuación $\dfrac{x-a_1}{m_1} = \dfrac{y-a_2}{m_2} = \dfrac{z-a_3}{m_3}$ y pasa por el punto $B(b_1, b_2, b_3)$ que no pertenece a r.

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

Se obtienen dos puntos cualesquiera de la recta dada, puntos que están contenidos en el plano cuya ecuación se desea hallar.

Para ello se dan en la ecuación $\dfrac{x-a_1}{m_1} = \dfrac{y-a_2}{m_2} = \dfrac{z-a_3}{m_3} = \lambda$ dos valores cualesquiera al parámetro λ.

Para $\lambda = 0$: $\dfrac{x-a_1}{m_1} = \dfrac{y-a_2}{m_2} = \dfrac{z-a_3}{m_3} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \\ z = a_3 \end{cases} \rightarrow$ punto $P(a_1, a_2, a_3)$;

para $\lambda = 1$: $\dfrac{x-a_1}{m_1} = \dfrac{y-a_2}{m_2} = \dfrac{z-a_3}{m_3} = 1 \rightarrow \begin{cases} x = m_1 + a_1 \\ y = m_2 + a_2 \\ z = m_3 + a_3 \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \text{punto } Q(m_1 + a_1, m_2 + a_2, m_3 + a_3).$$

El plano queda determinado por los puntos P, B y Q, que no están alineados. Por tanto, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ m_1+a_1-a_1 & m_2+a_2-a_2 & m_3+a_3-a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir:

$$(x-a_1)\begin{vmatrix} b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ m_2 & m_3 \end{vmatrix} - (y-a_2)\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_3-a_3 \\ m_1 & m_3 \end{vmatrix} + (z-a_3)\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = 0.$$

23. Sean las rectas r: $\begin{cases} x = 2z + p \\ y = -z + 3 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 2z + q \end{cases}$

Hallar la condición que deben cumplir p y q para que las rectas r y s estén contenidas en un plano.

Las dos rectas r y s están contenidas en un plano si se cortan en un punto o si son paralelas.

- Para que las rectas se corten en un punto el sistema formado por sus ecuaciones ha de ser compatible y determinado.

$$\begin{cases} x = 2z + p = -z + 1 \\ \\ y = -z + 3 = 2z + q \end{cases} \to \begin{cases} 3z = 1 - p \\ \\ 3z = 3 - q \end{cases} \to \begin{cases} z = \dfrac{1-p}{3}, \\ \\ z = \dfrac{3-q}{3}. \end{cases}$$

Para que el sistema sea compatible y determinado ha de ser:

$$z = \frac{1-p}{3} = \frac{3-q}{3} \to 1 - p = 3 - q \to q - p = 2.$$

La condición que deben cumplir p y q para que las rectas estén contenidas en un plano, como rectas que se cortan en un punto, es: $q - p = 2$.

- Para que las rectas sean paralelas las coordenadas de sus vectores de dirección deben ser proporcionales.

Se determina un vector director de cada una de las rectas, hallando la ecuación continua de cada una de ellas.

$$\text{r:} \begin{cases} x = 2z + p \\ \\ y = -z + 3 \end{cases} \to \begin{cases} z = \dfrac{x-p}{2} \\ \\ z = \dfrac{y-3}{-1} \end{cases} \to \frac{x-p}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{1} \to \mathbf{u}(2,-1,1);$$

$$\text{s:} \begin{cases} x = -z + 1 \\ \\ y = 2z + q \end{cases} \to \begin{cases} z = \dfrac{x-1}{-1} \\ \\ z = \dfrac{y-q}{2} \end{cases} \to \frac{x-1}{-1} = \frac{y-9}{2} = \frac{z}{1} \to \mathbf{v}(-1,2,1).$$

Como $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{1}{1}$, los vectores de dirección no son proporcionales y las rectas no están contenidas en un plano, como rectas paralelas.

24. Determinar p y q en el ejercicio anterior para que el plano pase por el punto (1, 1, 1).

El plano, que contiene a las rectas r y s del ejercicio anterior, está determinado por el punto (1,1,1) y los vectores $\mathbf{u}(2,-1,1)$ y $\mathbf{v}(-1,2,1)$ que, por ser, respectivamente, vectores de dirección de r y s también están contenidos en el plano.

Por tanto, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to -3x - 3y + 3z + 3 = 0 \to x + y - z - 1 = 0.$$

Para determinar p y q basta considerar que el punto (p,3,0) de la recta r y el punto (1,q,0) de la s han de verificar la ecuación del plano, ya que son puntos contenidos en él.

Punto (p,3,0): $p + 3 - 0 - 1 = 0 \rightarrow p = -2$; punto (1,q,0): $1 + q - 0 - 1 = 0 \rightarrow q = 0$.

Por tanto, para que el plano pase por el punto (1,1,1), $p = -2$ y $q = 0$.

Nota: Obsérvese que esos valores cumplen la condición $q - p = 0 - (-2) = 2$, hallada en el ejercicio anterior, para que las rectas r y s estén contenidas en un plano.

25. Hallar la condición para que r_a: $\begin{cases} x = az + 2 \\ y = z + 3 \end{cases}$ y r_b: $\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + b \end{cases}$ sean coplanarias.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Siguiendo el mismo proceso que en el ejercicio **23**, se tiene:

- Para que las rectas se corten en un punto el sistema formado por sus ecuaciones ha de ser compatible y determinado.

$$\begin{cases} x = az + 2 = 2z + 1 \\ y = z + 3 = -z + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a - 2)z = -1 \\ 2z = b - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-1}{a - 2}, \\ z = \dfrac{b - 3}{2}. \end{cases}$$

Para que el sistema sea compatible y determinado ha de ser:

$$\frac{-1}{a - 2} = \frac{b - 3}{2} \rightarrow (a - 2)(b - 3) = -2 \rightarrow ab - 3a - 2b + 6 = -2.$$

La condición para que las rectas sean coplanarias, como rectas que se cortan en un punto, es: $ab - 3a - 2b = -8$.

- Para que las rectas sean paralelas sus vectores de dirección han de ser proporcionales.

Se determina un vector director de cada una de las rectas, hallando la ecuación continua de cada una de ellas.

$$r_a: \begin{cases} x = az + 2 \\ y = z + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{x - 2}{a} \\ z = y - 3 \end{cases} \rightarrow \frac{x - 2}{a} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z}{1} \rightarrow \mathbf{u}(a,1,1).$$

$$r_b: \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{x - 1}{2} \\ z = \dfrac{y - b}{-1} \end{cases} \rightarrow \frac{x - 1}{2} = \frac{y - b}{-1} = \frac{z}{1} \rightarrow \mathbf{v}(2,-1,1).$$

Como $\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{1}{1}$, los vectores de dirección no son proporcionales y las rectas no son coplanarias, como rectas paralelas.

26. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y corta a las rectas

$$x = 2y = z - 1 \quad y \quad \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{3} = z.$$

(Propuesto en la Univ. de Salamanca.)

Se hallan las ecuaciones de dos planos π y π' que pasen por el origen y contengan, respectivamente, a la primera recta (r) y a la segunda recta (s). La intersección de dichos planos es una recta (t) que pasa por el origen y corta a las dos rectas del problema.

El plano π queda determinado por el punto O(0,0,0), un vector de dirección de la recta r y otro vector **OA**, siendo A un punto cualquiera de la recta r.

La ecuación continua de la recta r es: $\frac{x}{1} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{1}$; por tanto, tiene un vector director

$\mathbf{u}\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ o bien $\mathbf{v}(2,1,2)$ y pasa por el punto A(0,0,1).

El vector $\mathbf{OA} = (0,0,1) - (0,0,0) = (0,0,1)$.

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi\colon x - 2y = 0.$$

El plano π' queda determinado por el punto O(0,0,0), un vector de dirección de la recta s y otro vector **OB**, siendo B un punto cualquiera de la recta s.

La recta s tiene un vector director $\mathbf{w}(2,3,1)$ y pasa por el punto B(0,1,0).

El vector $\mathbf{OB} = (0,1,0) - (0,0,0) = (0,1,0)$.

Es decir, la ecuación del plano π' es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi'\colon -x + 2z = 0 \rightarrow \pi'\colon x - 2z = 0.$$

La intersección de ambos planos es la recta t: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2y = 2z$, que pasa por el origen y corta a las dos rectas dadas.

27. Dadas las rectas $r_1\colon \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ y $r_2\colon \begin{cases} x - y + z = -8 \\ 2x + 3y - z = -8, \end{cases}$ hallar la ecuación de la recta que se apoya en ambas y pasa por el punto P(8, 5, 4).

Se procede como en el ejercicio anterior, hallando las ecuaciones de dos planos π y π' que pasen por el punto P(8,5,4) y contengan el plano π a la recta r_1 y el plano π' a la recta r_2. La intersección de ambos planos es una recta t que pasa por el punto P y corta a (se apoya en) las rectas r_1 y r_2.

El plano π queda determinado por el punto P, un vector de dirección de la recta r_1 y otro vector **PA**, siendo A un punto cualquiera de la recta r_1.

Se halla la ecuación continua de la recta r_1, expresando z en función de x (eliminando la coordenada y entre sus dos ecuaciones) y en función de y (eliminando la coordenada x entre sus dos ecuaciones) e igualando los dos valores de z:

$$\begin{cases} x - 2y = -z - 1 \\ 4x + 2y = 4z - 4 \end{cases} \rightarrow 5x = 3z - 5 \rightarrow z = \frac{5x+5}{3} = \frac{x+1}{\frac{3}{5}};$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = 2z + 2 \\ 2x + y = 2z - 2 \end{cases} \rightarrow 5y = 4z \rightarrow z = \frac{5y}{4} = \frac{y}{\frac{4}{5}};$$

la ecuación continua de la recta r_1 es: $\dfrac{x+1}{\frac{3}{5}} = \dfrac{y}{\frac{4}{5}} = \dfrac{z}{1}$; por tanto, tiene un vector director $\mathbf{u}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$ o bien $\mathbf{v}(3,4,5)$ y pasa por el punto $A(-1,0,0)$.

El vector $\mathbf{PA} = (-1,0,0) - (8,5,4) = (-9,-5,-4)$.

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-8 & y-5 & z-4 \\ 3 & 4 & 5 \\ -9 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, $-16(x-8) - 45(y-5) - 15(z-4) + 36(z-4) + 12(y-5) + 25(x-8) = 0$.

Operando se obtiene la ecuación del plano π: $3x - 11y + 7z + 3 = 0$.

Se halla la ecuación continua de la recta r_2, siguiendo el procedimiento empleado para determinar la ecuación continua de la recta r_1:

$$\begin{cases} 3x - 3y = -3z - 24 \\ 2x + 3y = z - 8 \end{cases} \rightarrow 5x = -2z - 32 \rightarrow z = \frac{5x+32}{-2} = \frac{x + \frac{32}{5}}{-\frac{2}{5}};$$

$$\begin{cases} -2x + 2y = 2z + 16 \\ 2x + 3y = z - 8 \end{cases} \rightarrow 5y = 3z + 8 \rightarrow z = \frac{5y-8}{3} = \frac{y - \frac{8}{5}}{\frac{3}{5}};$$

la ecuación continua de la recta r_2 es: $\dfrac{x + \frac{32}{5}}{-\frac{2}{5}} = \dfrac{y - \frac{8}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{z}{1}$; por tanto, tiene un vector director $\mathbf{w}\left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$ o bien $\mathbf{t}(-2,3,5)$ y pasa por el punto $B\left(-\frac{32}{5}, \frac{8}{5}, 0\right)$.

El vector $\mathbf{PB} = \left(-\frac{32}{5}, \frac{8}{5}, 0\right) - (8,5,4) = \left(-\frac{72}{5}, \frac{17}{5}, -4\right)$ o bien $\mathbf{PB} = (-72,-17,-20)$.

Es decir, la ecuación del plano π' es:

$$\begin{vmatrix} x-8 & y-5 & z-4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -72 & -17 & -20 \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto, $-60(x-8) - 360(y-5) + 34(z-4) + 216(z-4) - 40(y-5) + 85(x-8) = 0$.

Operando se deduce la ecuación del plano π': $x - 16y + 10z + 32 = 0$.

La intersección de ambos planos es la recta t: $\begin{cases} 3x - 11y + 7z + 3 = 0 \\ x - 16y + 10z + 32 = 0 \end{cases}$, que pasa por el punto P y se apoya en las rectas r_1 y r_2.

28. Para las rectas $\dfrac{x-1}{2} = y = z$ e $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 3 \end{cases}$ obtener las ecuaciones de la recta que se apoya en ambas y tiene un vector director $(-1, 3, -1)$.

Se sigue un proceso análogo al empleado en el ejercicio **6** de los **ejercicios resueltos** de este mismo tema.

La primera recta (r) tiene un vector de dirección $\mathbf{u}(2,1,1)$ y pasa por el punto $A(1,0,0)$.

Se halla la ecuación de un plano π que contenga a la recta r y al vector de dirección de la recta (t) pedida, vector $\mathbf{v}(-1,3,-1)$; es decir, se calcula la ecuación del plano determinado por el punto A (uno cualquiera de la recta r) y los vectores **u** y **v**.

El punto de corte P del plano π con la segunda recta (s) pertenece a la recta t pedida. Por tanto, su ecuación queda determinada por el punto P y su vector director **v**.

La ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 4x - y - 7z - 4 = 0.$$

El punto P se calcula resolviendo el sistema formado por las ecuaciones del plano π y la recta s:

$$\begin{cases} 4x - y - 7z - 4 = 0, \\ y = 2x - 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de z e y de las dos últimas ecuaciones en la primera, se obtiene:

$$4x - (2x - 1) - 7 \cdot 3 - 4 = 0 \rightarrow 2x - 24 = 0 \rightarrow x = 12.$$

Reemplazando el valor de x en la segunda ecuación, se deduce:

$$y = 2x - 1 = 2 \cdot 12 - 1 = 23.$$

Por tanto, el punto de corte del plano π y la recta s es: $P(12,23,3)$.

La ecuación de la recta t pedida es:

$$\frac{x-12}{-1} = \frac{y-23}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

29. Sean las rectas r: $x = y = z$, s: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ y t: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

Hallar las ecuaciones de la recta que se apoya en las rectas r y s y es paralela a la recta t.

Un vector de dirección de la recta $t(x = -y = z)$ es: $\mathbf{w}(1,-1,1)$.

Como la recta (m) que se busca es paralela a la t, un vector director de la recta m es también **w**, con lo que el problema es análogo al anterior.

La recta r tiene un vector de dirección $\mathbf{u}(1,1,1)$ y pasa por el punto $O(0,0,0)$.

La ecuación del plano π, que contiene a la recta r y a los vectores **u** y **w**, es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: x - z = 0.$$

El punto de corte P del plano π con la recta s se halla resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow x = 2, y = 1, z = x = 2 \rightarrow \text{punto } P(2,1,2).$$

La recta m pedida está determinada por el punto P y el vector **w**; por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1} \rightarrow x-2=-y+1=z-2.$$

30. Hallar las ecuaciones de la recta que pasando por el punto P(1, 1, 0) esté contenida en el plano $x - y - 3z = 0$ y sea paralela a la recta $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

La recta (r) pedida queda determinada por el punto P(1,1,0) y un vector de dirección de la recta (s) dada, por ser la recta s paralela a la r.

Despejando la coordenada x en las dos ecuaciones de la recta s e igualando los valores obtenidos, se halla la ecuación continua de dicha recta:

$$x=-2y=2z \rightarrow \frac{x}{1}=\frac{y}{-\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{1}{2}}.$$

Por consiguiente, un vector director de la recta s es: $\mathbf{u}\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ o bien $\mathbf{v}(2,-1,1)$.

Es decir, la ecuación de la recta r que se busca es:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-0}{1} \rightarrow x-1=-2(y-1)=2z.$$

No se ha tenido en cuenta la hipótesis del problema que impone la condición de que la recta r esté contenida en el plano (π) dado. Ahora bien, basta comprobar que dos puntos de la recta están en el plano para poder asegurar que la recta está en el plano.

Un punto de la recta es P(1,1,0) y otro punto se obtiene dando un valor, distinto de cero, al parámetro λ en la ecuación $x - 1 = -2(y - 1) = 2z = \lambda$.

Para $\lambda = 1$: $x - 1 = -2(y - 1) = 2z = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ -2y+2=1 \\ 2z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \text{punto } Q\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Se comprueba si las coordenadas de los puntos P y Q satisfacen la ecuación del plano.

Punto P: $1 - 1 - 3 \cdot 0 = 0$; punto Q: $2 - \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 2 - \frac{4}{2} = 2 - 2 = 0.$

Por tanto, los puntos P y Q están contenidos en el plano, con lo que la recta r está contenida en el plano π. Es decir, la hipótesis del problema es cierta.

Nota: Se comprueba más fácilmente que la recta r está contenida en el plano π hallando el producto escalar de los vectores **v**(2,–1,1) y **w**(1,–1,–3), vector de dirección de la recta r y vector asociado del plano π, respectivamente.

Si el producto escalar es nulo, los dos vectores son perpendiculares y el vector **v** está contenido en el plano π (y, por tanto, la recta r pertenece al plano π), ya que el vector **w**, asociado del plano π, es perpendicular a éste.

Como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (2,-1,1) \cdot (1,-1,-3) = 2 \cdot 1 + (-1)(-1) + 1(-3) = 2 + 1 - 3 = 0$, los dos vectores son perpendiculares y la recta r está contenida en el plano π.

31. En el ejercicio anterior, ¿sobra alguna condición? Razonar la respuesta.

Como la recta r pedida queda determinada por las dos condiciones de pasar por el punto P dado y de ser paralela a la recta s dada, sobra la condición de estar contenida en el plano π del enunciado, condición que se ha comprobado que también es cierta.

32. Hallar el valor de k para que los planos $x + y + z = 2$, $2x + 3y + z = 3$ y $kx + 10y + 4z = -8$ tengan una recta común.

(Propuesto en la Univ. de Valencia.)

Para que los tres planos tengan una recta común (se corten los tres en una misma recta) el sistema formado por sus ecuaciones ha de ser compatible e indeterminado, con un grado de libertad; es decir, las soluciones han de depender de un parámetro λ que, al tomar valores, describe la recta común.

Se trata de una familia de sistemas, que dependen del parámetro k, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{vmatrix} = 12 + k + 20 - 3k - 8 - 10 = 14 - 2k.$$

Para $k = 7$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $k \neq 7$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por tanto, se presentan dos casos:

1) Para $k = 7$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 10 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Al ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 10 & -8 \end{vmatrix} = -24 + 21 + 40 - 42 + 16 - 30 = -19 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible, sin solución. Los tres planos no se cortan en una recta.

Como no hay proporcionalidad entre los coeficientes de x, y, z en las ecuaciones de los planos, éstos no son paralelos. Los planos se cortan dos a dos en una recta distinta, formando una superficie prismática triangular.

2) Para todo valor real de $k \neq 7$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados, con solución única que depende del valor del parámetro k. Los tres planos no se cortan según una recta, sino que lo hacen en un punto.

Es decir, no existe valor real de k para el que los tres planos tengan una recta común (se corten los tres en una misma recta).

33. Estudiar la posición relativa de los planos

$$mx + y - z = 1, 2x - y + mz = 3m \text{ y } x - 2y + (m + 1)z = 3m - 1,$$

según los distintos valores de m.

(Propuesto en la Univ. de León.)

Se analiza el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

Se trata de una familia de sistemas, dependientes del parámetro m, con $p = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & -1 & m \\ 1 & -2 & m+1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & m & 3m \\ 1 & -2 & m+1 & 3m-1 \end{pmatrix}.$$

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes: $|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & -1 & m \\ 1 & -2 & m+1 \end{vmatrix}$;

$$|A| = -m(m + 1) + m + 4 - 1 - 2(m + 1) + 2m^2 = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2.$$

Para $m = 1$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $m \neq 1$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Es decir, se presentan dos casos:

1) Para $m = 1$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Al ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, el rango de la matriz ampliada A^+ es menor que 3, $r^+ < 3$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

De acuerdo con el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado, con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad. Por consiguiente, los tres planos se cortan en una misma recta.

2) Para todo valor real de $m \neq 1$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados, con solución única que depende del valor del parámetro m. Los tres planos se cortan en un punto.

34. Discutir la posición de los planos

$$3x - ay + 2z - (a-1) = 0,\ 2x - 5y + 3z - 1 = 0 \text{ y } x + 3y - (a-1)z = 0,$$

según los distintos valores de a.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Se analiza el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

Se trata de una familia de sistemas, que dependen del parámetro a, con $m = 3$ ecuaciones y $n = 3$ incógnitas

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -a+1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 & a-1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -a+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se estudia el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 1-a \end{vmatrix} = -15(1-a) - 3a + 12 + 10 + 2a(1-a) - 27;$$

$$|A| = -2a^2 + 14a - 20 = -2(a^2 - 7a + 10).$$

Los valores de a que hacen cero el determinante $|A|$ son:

$$a^2 - 7a + 10 = 0 \rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \rightarrow a_1 = 5, a_2 = 2.$$

Para $a = 5$ y $a = 2$ el determinante $|A|$ es cero; para todo valor real de $a \neq 5$ y $a \neq 2$ el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por tanto, se presentan tres casos:

1) Para $a = 5$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al ser $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 10 = -5 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 + 24 + 20 + 0 - 9 = 30 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

En virtud del teorema de Rouché, al ser $r = 2 \neq 3 = r^+$, el sistema es incompatible, sin solución.

Al no existir proporcionalidad entre los coeficientes de x, y, z en las ecuaciones de los planos, éstos no son paralelos. Los planos se cortan dos a dos en una recta distinta y las tres rectas no concurren en un punto.

2) Para $a = 2$ el rango de la matriz A es menor que 3, $r < 3$.

En este caso la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 4 = -11 \neq 0$, el rango de la matriz A es $r = 2$.

Al ser $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, el rango de la matriz ampliada A^+ es menor que 3, $r^+ < 3$.

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 4 = -11 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 2$.

Según el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible e indeterminado, con $n - r = 3 - 2 = 1$ grado de libertad. Por tanto, los tres planos se cortan en una misma recta.

3) Para todo valor real de $a \neq 5$ y $a \neq 2$ el rango de la matriz A es $r = 3$.

Como $A = A_3$ es submatriz de $A^+ = A^+_{3,4}$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 3$.

Por el teorema de Rouché, al ser $r = r^+ = 3 = n$, los sistemas son compatibles y determinados, con solución única que depende del valor del parámetro a. Los tres planos se cortan en un punto.

35. Determinar a y b para que los planos

$$2x - y + z = 3,\ x - y + z = 2 \text{ y } 3x - y - az = b$$

se corten en una recta r.

Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto (2, 1, 3).

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

a) Para que los tres planos se corten en una recta r el sistema formado por sus ecuaciones ha de ser compatible e indeterminado, con un grado de libertad (las soluciones dependen de un parámetro λ).

De acuerdo con el teorema de Rouché, para que el sistema sea compatible e indeterminado, con un grado de libertad, ha de cumplirse que $r = r^+ = 2 < 3 = n$. Es decir, el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes y todos los menores de orden 3 de la matriz ampliada A^+ han de ser iguales a cero y debe existir, al menos, un menor de orden 2 de la matriz A (y, por tanto, de la matriz A^+) distinto de cero.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -a \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$, los rangos de las matrices A y A^+ pueden ser $r = r^+ = 2$.

Para que $r = 2$ el determinante $|A|$ de la matriz de los coeficientes ha de ser cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2a - 3 - 1 + 3 - a + 2 = a + 1 = 0 \rightarrow a = -1.$$

Para que $r^+ = 2$ los cuatro menores de orden 3 de la matriz ampliada A^+ han de ser cero (uno de ellos es $|A| = 0$, de donde ya se ha obtenido $a = -1$):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & b \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2b - 6 - 3 + 9 + b + 4 = -b + 4 = 0 \rightarrow b = 4;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -a & b \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2b + 6 - 3a - 9 - b + 4a = a + b - 3 = 0 \rightarrow b = 3 - a = 3 + 1 = 4;$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -a & b \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -b - 2 + 3a + 3 + b - 2a = a + 1 = 0 \rightarrow a = -1.$$

Para que los tres planos se corten en una recta r debe cumplirse que $a = -1$ y $b = 4$.

b) La intersección de dos cualesquiera de los tres planos es la recta r; por ejemplo,

$$r: \begin{cases} 2x - y + z = 3, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$$

El plano (π) pedido queda determinado por el punto $P(2,1,3)$, un vector de dirección de la recta r y otro vector **PA**, siendo A un punto cualquiera de la recta r.

Restando miembro a miembro las dos ecuaciones de la recta r, se obtiene:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -x + y - z = -2 \end{cases} \rightarrow x = 1.$$

Sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación de la recta r, se deduce:

$$1 - y + z = 2 \rightarrow z = y + 1.$$

La ecuación de la recta r se expresa: $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ y + 1 = z; \end{cases}$ por tanto, tiene un vector de dirección $\mathbf{u}(0,1,1)$ y pasa por el punto $A(1,-1,0)$.

El vector $\mathbf{PA} = (1,-1,0) - (2,1,3) = (-1,-2,-3)$.

Es decir, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -x - y + z = 0 \rightarrow x + y - z = 0.$$

36. Determinar razonadamente si las rectas

$$r: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

se cortan o se cruzan.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Para que las rectas r y s se corten en un punto el sistema formado por sus ecuaciones ha de ser compatible y determinado.

Se trata de un sistema con m = 4 ecuaciones y n = 3 incógnitas.

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada A^+ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se halla el rango de la matriz A de los coeficientes:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 4 - 4 + 2 - 1 = -4 \neq 0$, el rango de la matriz A es r = 3.

Se calcula el rango de la matriz ampliada A^+ averiguando en primer lugar el valor de su determinante $|A^+|$. Sustituyendo la primera fila por la que resulta al restarle la cuarta y desarrollando el determinante que se obtiene (equivalente al $|A^+|$) por los elementos de la primera fila, resulta:

$$|A^+| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Como $|A^+| = -2(2 + 1 - 4 + 1 + 2 + 4) = -2 \cdot 6 = -12 \neq 0$, el rango de la matriz A^+ es $r^+ = 4$.

Por el teorema de Rouché, al ser $r = 3 \neq 4 = r^+$, el sistema es incompatible, sin soluciones. Las rectas r y s no se cortan.

Por tanto, o son paralelas o se cruzan.

Se determinan las ecuaciones continuas de las rectas r y s, expresando z en función de x (eliminando la coordenada y entre las dos ecuaciones de cada recta) y en función de y (eliminando la coordenada x entre las dos ecuaciones de cada una de las rectas) e igualando los valores de z:

$$\begin{cases} x + y = 2z - 1 \\ 2x - y = -z + 1 \end{cases} \rightarrow 3x = z \rightarrow z = \frac{3x}{1} = \frac{x}{\frac{1}{3}};$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4z - 2 \\ -2x + y = z - 1 \end{cases} \rightarrow 3y = 5z - 3 \rightarrow z = \frac{3y + 3}{5} = \frac{y + 1}{\frac{5}{3}};$$

la ecuación continua de la recta r es: $\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y+1}{\frac{5}{3}} = \frac{z}{1}$; por tanto, tiene un vector director $u\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)$ o bien $v(1,5,3)$.

$$\begin{cases} 2x + y = z + 1 \\ x - y = 2z - 1 \end{cases} \rightarrow 3x = 3z \rightarrow z = x;$$

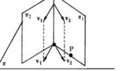
$$\begin{cases} 2x + y = z + 1 \\ -2x + 2y = -4z + 2 \end{cases} \rightarrow 3y = -3z + 3 \rightarrow z = \frac{3y - 3}{-3} = \frac{y - 1}{-1};$$

la ecuación continua de la recta s es: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$; por tanto, tiene un vector de dirección $w(1,-1,1)$.

Como $\frac{1}{1} \neq \frac{5}{-1} \neq \frac{3}{1}$, los vectores de dirección no son proporcionales y las rectas r y s no son paralelas. Es decir, las rectas r y s se cruzan.

TEMA II-2.1. ——— Producto escalar en el espacio tridimensional

Ejercicios resueltos



1. *Hallar un plano π que pasando por* P(0, 0, 1) *sea perpendicular a los planos* π_1: $x + y - z + 1 = 0$ *y* π_2: $2x - y + 3z = 0$.

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

Un vector asociado de π_1 es $\mathbf{v}_1(1, 1, -1)$.

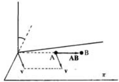
Un vector asociado de π_2 es $\mathbf{v}_2(2, -1, 3)$.

El plano π buscado está fijado por el punto P(0, 0, 1) y los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ del plano π:

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x(3 - 1) - y(3 + 2) + (z - 1)(-1 - 2) = 0.$$

La ecuación del plano π es: $2x - 5y - 3z + 3 = 0$.

2. *Dados los puntos* A(0, 1, 1) *y* B(1, 0, −2), *hallar la ecuación del plano que pasa por ellos y es perpendicular al plano* $2x - y + z + 1 = 0$.



Un vector asociado del plano dado es $\mathbf{v}(2, -1, 1)$. Este vector $\mathbf{v}$ está contenido en el plano buscado, por ser este plano perpendicular al plano dado.

El vector $\mathbf{AB} = (1, 0, -2) - (0, 1, 1) = (1, -1, -3)$ está contenido en el plano que se busca, al pertenecer a él los puntos A y B.

El plano buscado está fijado por el punto A y los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{AB}$ del mismo plano:

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 1 & z - 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x(3 + 1) - (y - 1)(-6 - 1) + (z - 1)(-2 + 1) = 0.$$

La ecuación del plano es: $4x + 7y - z - 6 = 0$.

3. *El espacio euclídeo tridimensional* E *está referido a una base* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, *constituida por vectores unitarios que forman entre sí ángulos de* 60°. *Se pide calcular el coseno del ángulo formado por los vectores* $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ *y* $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

(Propuesto en la Univ. de Salamanca.)

Según la expresión (8): $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$.

Ahora bien, la base de referencia para la métrica no es la base canónica, por lo que no son válidas, en este caso, las expresiones del producto escalar ni de los módulos. En la presente situación:

$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = |\mathbf{e}_1| \cdot |\mathbf{e}_1| \cdot \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1;$

$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = |\mathbf{e}_1| \cdot |\mathbf{e}_2| \cdot \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}.$

Igualmente:

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1;$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) =$$

$$= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3;$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 1.$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)} = \sqrt{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2};$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{3}.$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)};$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3};$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{2}.$$

Sustituyendo: $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \dfrac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}.$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Determinar la longitud del segmento de extremos M(1, –1, 3) y N(0, 2, –3).

La longitud del segmento MN es el módulo del vector $\mathbf{MN} = (0,2,-3) - (1,-1,3) = (-1,3,-6)$:

$$MN = |\mathbf{MN}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{1 + 9 + 36} = \sqrt{46}\ \text{u}.$$

2. Dados los vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -3)$ y $\mathbf{u}_3 = a \cdot \mathbf{u}_1 + b \cdot \mathbf{u}_2$, ¿qué relación deben satisfacer a y b para que el módulo de $\mathbf{u}_3$ valga la unidad?

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

$$\mathbf{u}_3 = a \cdot \mathbf{u}_1 + b \cdot \mathbf{u}_2 = a(2,0,0) + b(0,1,-3) = (2a,0,0) + (0,b,-3b) = (2a,b,-3b).$$

$$|\mathbf{u}_3| = \sqrt{(2a)^2 + b^2 + (-3b)^2} = \sqrt{4a^2 + b^2 + 9b^2} = \sqrt{4a^2 + 10b^2} = 1 \rightarrow 4a^2 + 10b^2 = 1.$$

Los escalares a y b deben satisfacer la relación $4a^2 + 10b^2 = 1$.

3. Calcular los vectores de longitud la unidad, ortogonales a los vectores (2, –2, 3) y (3, –3, 2).

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

El producto escalar de dos vectores ortogonales es nulo.

Sea el vector $\mathbf{v}(x,y,z)$, de módulo la unidad, ortogonal a los vectores $\mathbf{a}(2,-2,3)$ y $\mathbf{b}(3,-3,2)$. Los datos del enunciado permiten escribir el siguiente sistema:

$$\begin{cases} |\mathbf{v}| = 1 \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |\mathbf{v}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = 2x - 2y + 3z = 0, \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = 3x - 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

Eliminando x e y entre las dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$\begin{cases} 6x - 6y + 9z = 0 \\ -6x + 6y - 4z = 0 \end{cases} \rightarrow 5z = 0 \rightarrow z = 0.$$

Sustituyendo el valor de z en la segunda ecuación, se deduce:

$$2x - 2y + 3\cdot 0 = 0 \rightarrow 2x - 2y = 0 \rightarrow x = y.$$

Reemplazando y por x y z por su valor en la primera ecuación, resulta:

$$x^2 + x^2 + 0^2 = 1 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por tanto, hay dos vectores que cumplen las condiciones: $\mathbf{v}_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ y $\mathbf{v}_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

4. Calcular los valores de x e y para que el vector (x, y, 1) sea ortogonal a los vectores (3, 2, 0) y (2, 1, −1). *(Propuesto en la Univ. de Santiago.)*

Operando como en el ejercicio anterior, se tiene el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = 3x + 2y + 0\cdot 1 = 0 \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por el método de reducción, se deduce:

$$\begin{cases} -3x - 2y = 0 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \rightarrow x = 2; \qquad y = 1 - 2x = 1 - 4 = -3.$$

El vector pedido es $\mathbf{v}(2,-3,1)$.

5. El espacio euclídeo tridimensional se refiere a una base de vectores unitarios y que forman entre sí ángulos de 45°. Obtener el módulo del vector $\mathbf{u} = 2\cdot\mathbf{e}_1 - 3\cdot\mathbf{e}_2 + 4\cdot\mathbf{e}_3$.

Por la definición de módulo de un vector, se tiene:

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = (2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3)\cdot(2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3).$$

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, resulta:

$$|\mathbf{u}|^2 = 4\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - 6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - 12\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + 8\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - 12\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + 16\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3.$$

Por la propiedad conmutativa del producto escalar, se deduce:

$$|\mathbf{u}|^2 = 4\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + 16\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 - 12\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + 16\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - 24\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3.$$

Como la base $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ está compuesta por vectores unitarios que forman entre sí ángulos de 45°, se tiene:

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i = |\mathbf{e}_i|\cdot|\mathbf{e}_i|\cdot\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i) = 1\cdot 1\cdot\cos 0° = 1, \forall i = 1, 2, 3;$$

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = |\mathbf{e}_i|\cdot|\mathbf{e}_j|\cdot\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = 1\cdot 1\cdot\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall i = 1, 2, 3 \text{ y } \forall j = 1, 2, 3; i \neq j.$$

Por tanto:

$$|\mathbf{u}|^2 = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 16 \cdot 1 - 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 29 - \frac{20\sqrt{2}}{2} = 29 - 10\sqrt{2}.$$

Es decir, el módulo del vector **u** es: $|\mathbf{u}| = \sqrt{29 - 10\sqrt{2}} \simeq 3{,}85$.

6. Calcular la distancia al origen de coordenadas del plano $-x - y + 2z - 3 = 0$.

La distancia de un plano π al origen de coordenadas O es:

$$d(0,\pi) = \left| \frac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|,$$

siendo a, b y c los respectivos coeficientes de x, y, z en la ecuación del plano y d el término independiente de dicha ecuación.

Es decir, la distancia pedida es: $d = \left| \dfrac{3}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}} \right| = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ u.

7. Hallar la distancia al origen de coordenadas del plano determinado por el punto (1, 0, 2) y la recta

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

El plano (π) queda determinado por el punto P(1,0,2), un vector de dirección de la recta (r) dada y otro vector **PA**, siendo A un punto cualquiera de la recta r.

Se halla la ecuación continua de la recta r, expresando z en función de x (eliminando y entre sus dos ecuaciones) y en función de y (eliminando x entre las dos ecuaciones de la recta) e igualando los valores de z:

$$\begin{cases} x - y = z + 1 \\ x + y = 2z \end{cases} \rightarrow 2x = 3z + 1 \rightarrow z = \frac{2x - 1}{3} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}};$$

$$\begin{cases} -x + y = -z - 1 \\ x + y = 2z \end{cases} \rightarrow 2y = z - 1 \rightarrow z = \frac{2y + 1}{1} = \frac{y + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}};$$

la ecuación continua de la recta r es: $\dfrac{x - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{y + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{z}{1}$; por tanto, tiene un vector director

$\mathbf{u}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ o bien $\mathbf{v}(3,1,2)$ y pasa por el punto $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$.

El vector $\mathbf{PA} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) - (1,0,2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)$.

Así pues, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, $-2(x-1) - y - \frac{3}{2}(z-2) + \frac{1}{2}(z-2) + 6y + (x-1) = 0$.

Operando se obtiene la ecuación del plano $\pi : x - 5y + z - 3 = 0$.

Por consiguiente la distancia pedida es: $d = \left| \frac{3}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 1^2}} \right| = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ u.

8. Sean los puntos A(0, 3, −2) y B(1, 5, 0). Hallar la ecuación del plano perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto A.

(Propuesto en la Univ. de Zaragoza.)

Como el plano es perpendicular al vector $\mathbf{AB} = (1,5,0) - (0,3,-2) = (1,2,2)$, este vector es un vector asociado del plano.

Por tanto, la ecuación del plano es: $x + 2y + 2z + d = 0$.

Como el plano pasa por el punto A(0,3,−2), las coordenadas de A satisfacen la ecuación del plano: $0 + 2 \cdot 3 + 2(-2) + d = 0 \rightarrow d = -2$.

Es decir, la ecuación del plano es: $x + 2y + 2z - 2 = 0$.

9. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P(0, 0, 1) y es perpendicular al plano $4x + z - 1 = 0$.

Un vector asociado del plano es $\mathbf{u}(4,0,1)$, que es también un vector de dirección de la recta pedida, por ser ésta perpendicular al plano.

Como, además, la recta pasa por el punto P(0,0,1), sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 0 + 4 \cdot \lambda \\ y = 0 + 0 \cdot \lambda \\ z = 1 + 1 \cdot \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4\lambda, \\ y = 0, \\ z = 1 + \lambda. \end{cases}$$

Despejando el parámetro λ, la ecuación se expresa: $\begin{cases} \frac{x}{4} = z - 1, \\ y = 0. \end{cases}$

10. Calcular las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(0, 0, 1) y es perpendicular al plano definido por los puntos B(0, 1, 0), C(1, 0, 1) y D(1, 1, 0).

(Propuesto en la Univ. de León.)

La ecuación del plano definido por los puntos B, C y D es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1-0 & 0-1 & 1-0 \\ 1-0 & 1-1 & 0-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y + z - 1 = 0.$$

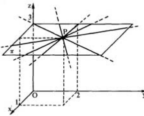
Un vector asociado del plano es $\mathbf{u}(0,1,1)$, que es un vector de dirección de la recta pedida, por ser ésta perpendicular al plano. Además, la recta pasa por el punto A(0,0,1); por tanto, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 0 + 0 \cdot \lambda \\ y = 0 + 1 \cdot \lambda \\ z = 1 + 1 \cdot \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = \lambda, \\ z = 1 + \lambda. \end{cases}$$

Despejando el parámetro λ, la ecuación se expresa: $\begin{cases} x = 0, \\ y = z - 1. \end{cases}$

11. Se piden las ecuaciones de la recta perpendicular al eje Oz por el punto (1, 2, 3).

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)



Existen infinitas rectas perpendiculares al eje Oz que pasan por el punto P(1,2,3), ya que son solución todas las rectas contenidas en el plano π, de ecuación $z = 3$, paralelo al plano coordenado Oxy. La solución es, pues, el haz de rectas del plano π cuyo vértice es el punto P.

(Véase la figura adjunta.)

Por tanto, un vector de dirección de cada una de las rectas del haz es $\mathbf{u}(u_1,u_2,0)$ y, como pasan por el punto P(1,2,3), sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 1 + u_1 \cdot \lambda, \\ y = 2 + u_2 \cdot \lambda, \\ z = 3 + 0 \cdot \lambda. \end{cases}$$

Despejando el parámetro λ, las ecuaciones se expresan: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{u_1} = \dfrac{y-2}{u_2}, \\ z = 3. \end{cases}$

Nota: Para que la recta del haz quede determinada se necesita otra condición; por ejemplo, que corte al eje Oz.

En tal caso $u_1 = 1$ y $u_2 = 2$ y las ecuaciones de la recta son: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y}{2}, \\ z = 3. \end{cases}$

12. Sea el punto A(1, 1, 3) y la recta r $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$

Hallar:

a) la ecuación del plano perpendicular a la recta r por el punto A;

b) la intersección de ese plano con la recta r.

(Propuesto en la UNED.)

a) Un vector de dirección de la recta r es $\mathbf{u}(1,1,2)$, que es un vector asociado del plano (π) pedido, por ser éste perpendicular a la recta r. Además, como el plano π pasa por el punto A(1,1,3), tiene por ecuación:

$$1(x-1) + 1(y-1) + 2(z-3) = 0 \rightarrow x + y + 2z - 8 = 0.$$

b) Para hallar las coordenadas del punto de intersección (B) del plano π y la recta r se resuelve el sistema formado por las ecuaciones del plano y la recta.

Sustituyendo x, y, z de la ecuación del plano por sus valores en las ecuaciones paramétricas de la recta, se tiene:

$$t + (2 + t) + 2(2t) - 8 = 0 \rightarrow 6t = 6 \rightarrow t = 1.$$

Reemplazando el valor de t en las ecuaciones paramétricas de la recta, se deduce:

$$x = t = 1, \quad y = 2 + t = 3, \quad z = 2t = 2 \rightarrow \text{el punto de intersección es } B(1,3,2).$$

13 Hallar la proyección ortogonal del origen de coordenadas sobre el plano $x + 2y + 3z = 4$.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

La proyección ortogonal del origen de coordenadas sobre un plano es el pie de la perpendicular trazada desde el origen al plano.

Se halla la ecuación de la recta (r) que pasa por el origen y es perpendicular al plano (π) y se calcula el punto de corte P del plano y de la recta resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos.

Un vector asociado del plano π es $\mathbf{u}(1,2,3)$, que es también un vector de dirección de la recta, por ser ésta perpendicular al plano.

Como, además, la recta pasa por el punto O(0,0,0), sus ecuaciones paramétricas son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 + 1 \cdot \lambda \\ y = 0 + 2 \cdot \lambda \\ z = 0 + 3 \cdot \lambda \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = 3\lambda. \end{array}\right.$$

Sustituyendo x, y, z de la ecuación del plano π por sus valores en las ecuaciones paramétricas de la recta, resulta:

$$\lambda + 2(2\lambda) + 3(3\lambda) = 4 \rightarrow 14\lambda = 4 \rightarrow \lambda = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

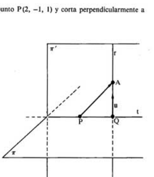
Reemplazando el valor de λ en las ecuaciones paramétricas de la recta, se obtiene:

$$x = \lambda = \frac{2}{7}, \quad y = 2\lambda = \frac{4}{7}, \quad z = 3\lambda = \frac{6}{7} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{ la proyección ortogonal es el punto } P\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right).$$

14. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P(2, −1, 1) y corta perpendicularmente a la recta $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$.

(Propuesto en la Univ. de Baleares.)



Como se observa en la figura adjunta, la recta (t) pedida es la intersección de dos planos π y π', perpendiculares entre sí, que pasan por el punto (P) dado, y tales que el plano π es perpendicular a la recta (r) dada y el π' contiene a dicha recta.

Un vector director de la recta r es $\mathbf{u}(2,2,1)$, que es un vector asociado del plano π, por ser éste perpendicular a la recta r. Por tanto, la ecuación del plano π es: $2x + 2y + z + d = 0$.

Como el plano pasa por el punto P(2,−1,1), las coordenadas de P verifican la ecuación del plano: $2 \cdot 2 + 2(-1) + 1 \cdot 1 + d = 0 \rightarrow d = -3$.

Es decir, la ecuación del plano π es:

$$2x + 2y + z - 3 = 0.$$

El plano π' queda determinado por el punto P(2,−1,1), un vector de dirección $\mathbf{u}(2,2,1)$ de la recta r y otro vector **PA**, siendo A(2,1,0) un punto (cualquiera) de la recta r.

El vector $\mathbf{PA} = (2,1,0) - (2,-1,1) = (0,2,-1)$.

Así pues, la ecuación del plano π' es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - y - 2z - 3 = 0.$$

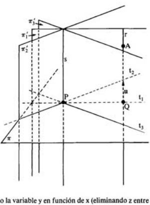
Por tanto, las ecuaciones de la recta t pedida son: $\begin{cases} 2x + 2y + z = 3, \\ 2x - y - 2z = 3. \end{cases}$

15 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, -1, 2)$ y es perpendicular a la recta

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

El problema es parecido al anterior, con la diferencia de que existen infinitas rectas perpendiculares a la recta (r) dada, ya que son solución todas las rectas $t_1, t_2, t_3, \ldots$ que pasan por el punto P dado y están contenidas en el plano π, que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r. La solución es, pues, el haz de rectas $t_1, t_2, t_3, \ldots$ del plano π cuyo vértice es el punto P.



Las rectas $t_1, t_2, t_3, \ldots$ son las intersecciones del plano π con todos los planos $\pi_1', \pi_2', \pi_3', \ldots$ que pasan por la recta (s), trazada por el punto P y paralela a la r (radiación de planos $\pi_1', \pi_2', \pi_3', \ldots$ cuyo eje es la recta s).

(Véase la figura adjunta.)

El plano π queda determinado por el punto P y un vector de dirección **u** de la recta r, que es un vector asociado del plano, por ser éste perpendicular a la recta.

Se halla la ecuación continua de la recta r, expresando la variable y en función de x (eliminando z entre las dos ecuaciones de la recta) y en función de z (eliminando x entre las mismas ecuaciones) e igualando los valores de y:

$$\begin{cases} -x - z = -2y - 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \rightarrow x = -2y - 1 \rightarrow y = \frac{x+1}{-2};$$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 4y + 2 \\ -2x - z = 0 \end{cases} \rightarrow z = 4y + 2 \rightarrow y = \frac{z-2}{4};$$

la ecuación continua de la recta r es: $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{4}$; por tanto, tiene un vector de dirección $\vec{u}(-2,1,4)$ y pasa por el punto $A(-1,0,2)$.

Por tanto, un vector asociado del plano π es $\mathbf{u}(-2,1,4)$ y, como el plano pasa por el punto $P(1,-1,2)$, su ecuación es:

$$-2(x-1) + (y+1) + 4(z-2) = 0 \rightarrow -2x + y + 4z - 5 = 0 \rightarrow 2x - y - 4z + 5 = 0.$$

La radiación de planos $\pi_1', \pi_2', \pi_3', \ldots$ queda determinada, en función de un parámetro k, por las ecuaciones de dos planos cualesquiera de la radiación, ya que conocidos esos dos planos, $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, que se cortan en la recta s, la ecuación de la radiación de planos que pasan por la recta s es: $ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$.

La recta s queda determinada por el punto $P(1,-1,2)$ y un vector de dirección $\mathbf{u}(-2,1,4)$ de la recta r, ya que la recta s es paralela a la r. Es decir, la ecuación de la recta s es:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4} \rightarrow \begin{cases} 1(x-1) = -2(y+1) \\ 4(x-1) = -2(z-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = -1, \\ 4x + 2z = 8. \end{cases}$$

Así pues, la recta s es la intersección de los planos $x + 2y + 1 = 0$ y $4x + 2z - 8 = 0$, que son dos planos cualesquiera de la radiación de planos $\pi_1', \pi_2', \pi_3', \dots$

Por tanto, la ecuación de dicha radiación de planos es:

$$x + 2y + 1 + k(4x + 2z - 8) = 0 \rightarrow (1 + 4k)x + 2y + 2kz + (1 - 8k) = 0.$$

Es decir, las ecuaciones del haz de rectas $t_1, t_2, t_3, \dots$, que pasan por el punto P y son perpendiculares a la recta r, son: $\begin{cases} 2x - y - 4z = -5, \\ (1 + 4k)x + 2y + 2kz = 8k - 1. \end{cases}$

Nota: Para que la recta del haz quede determinada se necesita otra condición; por ejemplo, que corte a la recta r (se trataría de la recta t_1, contenida en el plano π_1' que corta a la recta r en el punto Q).

En tal caso el plano π_1' se determina en la ecuación de la radiación de planos, porque pasa por un punto cualquiera de la recta r; por ejemplo, el $A(-1,0,2)$.

Las coordenadas del punto A verifican la ecuación de la radiación de planos:

$$(1 + 4k)(-1) + 2 \cdot 0 + 2k \cdot 2 + 1 - 8k = 0 \rightarrow -8k = 0 \rightarrow k = 0.$$

Por consiguiente, la ecuación del plano π_1', es: $x + 2y + 1 = 0$.

Como la recta t_1 pedida es la intersección de los planos π y π_1', su ecuación es: $\begin{cases} 2x - y - 4z = -5, \\ x + 2y = -1. \end{cases}$

Se puede hallar la ecuación de la recta t_1 siguiendo el proceso del ejercicio anterior, calculando la ecuación del plano π_1'. Este plano queda determinado por el punto $P(1,-1,2)$, un vector director $\mathbf{u}(-2,1,4)$ de la recta r y otro vector $\mathbf{PA}$, siendo $A(-1,0,2)$ un punto (cualquiera) de la recta r.

El vector $\mathbf{PA} = (-1,0,2) - (1,-1,2) = (-2,1,0)$.

Así pues, la ecuación del plano π_1' es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 2y + 1 = 0.$$

La intersección de los planos π y π_1' es la recta t: $\begin{cases} 2x - y - 4z = -5, \\ x + 2y = -1. \end{cases}$

16. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(3, -2, -1)$ y es perpendicular a la recta

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = -z.$$

¿Falta alguna condición en el enunciado? Razonar la respuesta.

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

1) El problema es idéntico al anterior y se sigue el mismo proceso.

El plano π queda determinado por el punto $P(3,-2,-1)$ y un vector de dirección $\mathbf{u}(2,3,-1)$ de la recta (r) dada, que es un vector asociado del plano, por ser éste perpendicular a la recta.

La ecuación del plano π es:

$$2(x - 3) + 3(y + 2) - (z + 1) = 0 \rightarrow 2x + 3y - z - 1 = 0.$$

La radiación de planos π_1', π_2', π_3', ... queda determinada, en función de un parámetro k, por las ecuaciones de dos planos cualesquiera de la radiación (que se cortan en la recta s).

La recta s queda determinada por el punto P(3,–2,–1) y un vector de dirección $\mathbf{u}(2,3,-1)$ de la recta r, ya que ambas rectas son paralelas. La ecuación de la recta s es:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{-1} \rightarrow \begin{cases} 3(x-3) = 2(y+2) \\ -(x-3) = 2(z+1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 13, \\ x + 2z = 1. \end{cases}$$

Por tanto, la recta s es la intersección de los planos $3x - 2y - 13 = 0$ y $x + 2z - 1 = 0$, que son dos planos cualesquiera de la radiación de planos π_1', π_2', π_3', ...

La ecuación de dicha radiación de planos es:

$$3x - 2y - 13 + k(x + 2z - 1) = 0 \rightarrow (3+k)x - 2y + 2kz - (13+k) = 0.$$

Es decir, las ecuaciones del haz de rectas t_1, t_2, t_3, ..., perpendiculares a la recta r y que pasan por el punto P, son: $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ (3+k)x - 2y + 2kz - (13+k) = 0. \end{cases}$

2) Como la solución queda en función de un parámetro k, la recta pedida no está determinada, lo que indica que falta una condición en el enunciado; por ejemplo, como se ha supuesto en el problema anterior, que corte a la recta r.

En tal caso el plano π_1' se determina en la ecuación de la radiación de planos, ya que pasa por un punto cualquiera de la recta r; por ejemplo, el A(3,–1,0).

Las coordenadas del punto A satisfacen la ecuación de la radiación de planos:

$$(3+k)\cdot 3 - 2(-1) + 2k \cdot 0 - (13+k) = 0 \rightarrow 2k = 2 \rightarrow k = 1.$$

Por consiguiente, la ecuación del plano π_1' es:

$$(3+1)x - 2y + 2z - (13+1) = 0 \rightarrow 4x - 2y + 2z - 14 = 0 \rightarrow 2x - y + z - 7 = 0.$$

Como la recta t_1 pedida es la intersección de los planos π y π_1', su ecuación es:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ 2x - y + z = 7. \end{cases}$$

Se puede hallar la ecuación de la recta t_1 calculando el punto de corte Q de la recta r y el plano π. La recta t_1 queda determinada por los puntos P y Q. (El método sirve también para hallar la recta t del ejercicio **14** y la t_1 del **15.**)

Para calcular las coordenadas del punto de intersección Q de la recta r y del plano π se soluciona el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.

Sustituyendo x, y, z de la ecuación del plano por sus valores en las ecuaciones paramétricas ($x = 2\lambda + 3$, $y = 3\lambda - 1$, $z = -\lambda$) de la recta, se tiene:

$$2(2\lambda + 3) + 3(3\lambda - 1) - (-\lambda) - 1 = 0 \rightarrow 14\lambda = -2 \rightarrow \lambda = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7}.$$

Reemplazando el valor de λ en las ecuaciones paramétricas de la recta, se obtiene:

$$x = 2\lambda + 3 = -\frac{2}{7} + 3 = \frac{19}{7}, \quad y = 3\lambda - 1 = -\frac{3}{7} - 1 = -\frac{10}{7},$$

$$z = -\lambda = \frac{1}{7} \rightarrow \text{punto } Q\left(\frac{19}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{1}{7}\right).$$

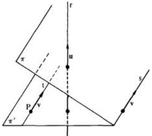
La ecuación continua de la recta t_1 es: $\dfrac{x-3}{\dfrac{19}{7}-3} = \dfrac{y+2}{-\dfrac{10}{7}+2} = \dfrac{z+1}{\dfrac{1}{7}+1} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{x-3}{-\frac{2}{7}} = \frac{y+2}{\frac{4}{7}} = \frac{z+1}{\frac{8}{7}} \rightarrow \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{4}.$$

Se deja al lector que compruebe que esta ecuación y las ecuaciones obtenidas anteriormente corresponden a la misma recta (t_1).

17. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (1, 2, −1), es paralela al plano $2x + y - z = 3$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)



Como se observa en la figura adjunta, la recta (t) pedida es la paralela, trazada por el punto (P) dado, a la recta (s), intersección del plano (π) dado con otro plano (π') que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r.

(Recuérdese que una recta es paralela a un plano si no tiene ningún punto común con él y que dicha recta es paralela a infinitas rectas del plano, paralelas entre sí.)

El plano π' queda determinado por el punto $P(1,2,-1)$ y un vector de dirección $\mathbf{u}(-1,1,-3)$ de la recta r, que es un vector asociado del plano, por ser éste perpendicular a la recta.

Por tanto, la ecuación del plano π' es: $-(x-1) + (y-2) - 3(z+1) = 0 \rightarrow x - y + 3z + 4 = 0.$

Por tanto, las ecuaciones de la recta s son: $\begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ x - y + 3z = -4. \end{cases}$

Se halla la ecuación continua de la recta s, expresando z en función de x (eliminando y entre las dos ecuaciones de la recta) y en función de y (eliminando x entre las mismas ecuaciones) e igualando los valores de z:

$$\begin{cases} 2x + y = z + 3 \\ x - y = -3z - 4 \end{cases} \rightarrow 3x = -2z - 1 \rightarrow z = \frac{3x+1}{-2} = \frac{x + \frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}};$$

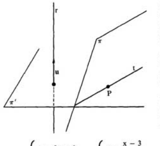
$$\begin{cases} 2x + y = z + 3 \\ -2x + 2y = 6z + 8 \end{cases} \rightarrow 3y = 7z + 11 \rightarrow z = \frac{3y - 11}{7} = \frac{y - \frac{11}{3}}{\frac{7}{3}};$$

la ecuación continua de la recta s es: $\dfrac{x + \frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} = \dfrac{y - \frac{11}{3}}{\frac{7}{3}} = \dfrac{z}{1}$; por tanto, tiene un vector de dirección $\mathbf{v}\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)$ o bien $\mathbf{w}(-2,7,3)$.

La ecuación continua de la recta t es: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+1}{3}$.

18. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (1, 1, 1), está contenida en el plano $x + y + z - 3 = 0$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = -z + 4 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)



Como se observa en la figura adjunta, la recta (t) pedida es la intersección del plano (π) dado, que pasa por el punto (P) dado, y otro plano (π') que pasa también por el punto P y es perpendicular a la recta (r) dada.

El plano π' queda determinado por el punto P y un vector de dirección **u** de la recta r, que es un vector asociado del plano, por ser éste perpendicular a la recta.

El vector de dirección **u** de la recta r se halla calculando la ecuación continua de la recta, expresando z en función de x y de y e igualando los valores de z:

$$\begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = -z + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \frac{x-3}{2} \\ z = \frac{y-4}{-1} \end{cases} \rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{1} \rightarrow \mathbf{u}(2,-1,1).$$

La ecuación del plano π', determinado por el punto P(1,1,1) y el vector **u**(2,–1,1), vector asociado del plano, es:

$$2(x-1) - (y-1) + (z-1) = 0 \rightarrow 2x - y + z - 2 = 0.$$

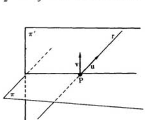
Por tanto, las ecuaciones de la recta t pedida son: $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y + z = 2. \end{cases}$

19. Obtener la ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z - 3$ y es perpendicular al plano de ecuación $x - y + 2z - 1 = 0$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Como se observa en la figura adjunta el plano (π') pedido está determinado por el punto P, intersección de la recta (r) dada con el plano (π) dado, por un vector de dirección **u** de la recta r y por un vector **v**, vector asociado del plano π, ya que los tres elementos (punto P y vectores **u** y **v**) pertenecen al plano π'.

Para hallar las coordenadas del punto de corte P de la recta r y el plano π se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.



Sustituyendo x, y, z de la ecuación del plano por sus valores en las ecuaciones paramétricas ($x = 2\lambda + 1$, $y = 3\lambda - 2$, $z = \lambda + 3$) de la recta, se tiene:

$$(2\lambda + 1) - (3\lambda - 2) + 2(\lambda + 3) - 1 = 0 \rightarrow \lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = -8.$$

Reemplazando el valor de λ en las ecuaciones paramétricas de la recta, resulta:

$$x = 2\lambda + 1 = -16 + 1 = -15, \quad y = 3\lambda - 2 = -24 - 2 = -26,$$

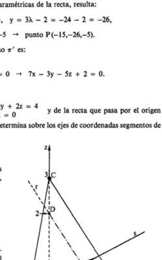
$$z = \lambda + 3 = -8 + 3 = -5 \rightarrow \text{punto } P(-15,-26,-5).$$

Como $\mathbf{u}(2,3,1)$ y $\mathbf{v}(1,-1,2)$, la ecuación del plano π' es:

$$\begin{vmatrix} x + 15 & y + 26 & z + 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 7x - 3y - 5z + 2 = 0.$$

20. Determinar la posición relativa de la recta $\begin{cases} 3y + 2z = 4 \\ x = 0 \end{cases}$ y de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que determina sobre los ejes de coordenadas segmentos de longitud 1, 2 y 3, respectivamente.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)



El plano (ABC) dado queda determinado por los puntos A(1,0,0), B(0,2,0) y C(0,0,3). Por tanto, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 0 \\ 0 - 1 & 2 - 0 & 0 - 0 \\ 0 - 1 & 0 - 0 & 3 - 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

La recta (s), que pasa por el origen y es perpendicular al plano ABC, queda determinada por el punto O(0,0,0) y un vector $\mathbf{v}(6,3,2)$, vector asociado del plano, que es un vector de dirección de la recta, por ser ésta perpendicular al plano. Es decir, las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$\begin{cases} x = 0 + 6\lambda \\ y = 0 + 3\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6\lambda, \\ y = 3\lambda, \\ z = 2\lambda. \end{cases}$$

Para determinar la posición relativa de las rectas r y s se estudia el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 3y + 2z = 4 \\ x = 0 \\ x = 6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 3\lambda + 2 \cdot 2\lambda = 4 \\ x = 0 \\ x = 6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 13\lambda = 4, \\ x = 0, \\ x = 6\lambda = 0, \\ y = 3\lambda, \\ z = 2\lambda. \end{cases}$$

De la primera ecuación se deduce: $\lambda_1 = \dfrac{4}{13}$; de la tercera se obtiene: $\lambda_2 = 0$.

Como $\lambda_1 = \dfrac{4}{13} \neq 0 = \lambda_2$, el sistema es incompatible; es decir, las rectas r y s no se cortan y, por tanto, o son paralelas o se cruzan.

Las ecuaciones de la recta r se pueden escribir: $\begin{cases} y = \dfrac{-2z+4}{3} = \dfrac{z-2}{-\dfrac{3}{2}} \\ x = 0; \end{cases}$ por tanto, tiene un vector de dirección $\mathbf{u}\left(0, 1, -\dfrac{3}{2}\right)$ o bien $\mathbf{w}(0,2,-3)$.

Como $\dfrac{0}{6} \neq \dfrac{2}{3} = \dfrac{-3}{2}$, los coeficientes de x, y, z de las rectas r y s no son proporcionales y las rectas no son paralelas. Por tanto, las rectas r y s se cruzan.

Nota: En la figura se observa que las rectas r y s se cruzan, ya que la recta r está contenida en el plano Oyz y no pasa por el origen, y la recta s pasa por el origen y no está contenida en dicho plano.

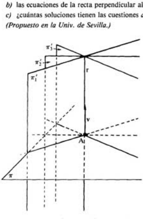
21. Dados el plano $2x + y - z = 5$ y el punto $A(1, 2, -1)$, se pide:

a) la ecuación del plano perpendicular al dado que pase por el punto A;

b) las ecuaciones de la recta perpendicular al plano dado que pase por el punto A;

c) ¿cuántas soluciones tienen las cuestiones *a)* y *b)* y qué relación guardan entre ellas?

(Propuesto en la Univ. de Sevilla.)



El punto $A(1,2,-1)$ dado pertenece al plano (π) dado, ya que las coordenadas de A satisfacen la ecuación de π:

$$2 \cdot 1 + 2 - (-1) = 5 \rightarrow 5 = 5.$$

a) Existen infinitos planos $\pi_1', \pi_2', \pi_3', \ldots$ que pasan por el punto A y son perpendiculares al plano π, ya que es solución la radiación de planos cuyo eje es la recta (r), trazada por el punto A y perpendicular al plano π.

La radiación de planos $\pi_1', \pi_2', \pi_3', \ldots$ queda determinada, en función de un parámetro k, por las ecuaciones de dos planos cualesquiera de la radiación (que se cortan en la recta r).

La recta r queda determinada por el punto $A(1,2,-1)$ y un vector $\mathbf{v}(2,1,-1)$, vector asociado del plano, que es un vector de dirección de la recta, por ser ésta perpendicular al plano. La ecuación de la recta r es:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2(y-2) \\ -(x-1) = z+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y = -3, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Por tanto, la recta r es la intersección de los planos $x - 2y + 3 = 0$ y $x + z = 0$, que son dos planos cualesquiera de la radiación de planos $\pi_1', \pi_2', \pi_3', \ldots$

La ecuación de dicha radiación de planos es:

$$x - 2y + 3 + k(x+z) = 0 \rightarrow (1+k)x - 2y + kz + 3 = 0.$$

b) Ya se han hallado en el apartado anterior las ecuaciones de la recta r, que pasa por el punto A y es perpendicular al plano π.

c) La cuestión *a)* tiene infinitas soluciones y la *b)* tiene solución única.

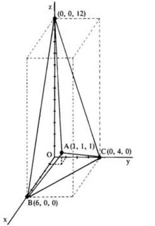
La relación entre las soluciones es que la recta r, solución única de la cuestión *b)*, es el eje de los infinitos planos que pasan por el punto A y son perpendiculares al plano π, infinitas soluciones de la cuestión *a)*.

TEMA II-2.2. —— Producto vectorial y producto mixto

Ejercicios resueltos

1. *Hallar el volumen del tetraedro de vértices el punto* A(1, 1, 1) *y los puntos en los que el plano* $2x + 3y + z - 12 = 0$ *corta a los ejes coordenados.*

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)



Dichos puntos son:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 12 \end{aligned}\right\} \to B(6, 0, 0);$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 12 \end{aligned}\right\} \to C(0, 4, 0);$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 12 \end{aligned}\right\} \to D(0, 0, 12).$$

El volumen del tetraedro es un sexto del volumen del paralelepípedo; por tanto:

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\,\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{AC} \times \mathbf{AD}).$$

$\mathbf{AB} = (6, 0, 0) - (1, 1, 1) = (5, -1, -1);$
$\mathbf{AC} = (0, 4, 0) - (1, 1, 1) = (-1, 3, -1);$
$\mathbf{AD} = (0, 0, 12) - (1, 1, 1) = (-1, -1, 11).$

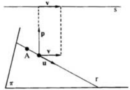
$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 144 = 24u^3.$$

2. *Hallar la ecuación de un plano que contiene a la recta* r: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ *y es paralelo a la recta* s: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{2}$.

Un vector director de r es $\mathbf{u}(-1, 1, 2)$. Esta recta y el plano pasan por el punto $A(1, 2, -1)$.

Un vector director de s es $\mathbf{v}(2, 1, 2)$.

Al estar contenidos en el plano pedido los vectores **u** y **v**, un vector asociado de dicho plano es el producto vectorial de ambos:



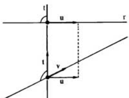
$$\mathbf{p} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right);$$

$$\mathbf{p}(0, 6, -3).$$

El plano buscado es: $0 \cdot (x - 1) + 6 \cdot (y - 2) + (-3) \cdot (z + 1) = 0 \to 2y - z - 5 = 0.$

3. *Escribir las ecuaciones de la perpendicular común a las rectas* r: $x = y = z$ *y* s: $x = y = 3z - 1$.

(Propuesto en la Univ. de Salamanca.)



La recta r pasa por el punto (0, 0, 0) y tiene vector director **u**(1, 1, 1).

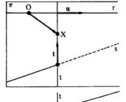
La recta s: $x = y = \dfrac{z - 1/3}{1/3}$ pasa por el punto $\left(0, 0, \dfrac{1}{3}\right)$ y tiene vector director $\mathbf{v}\left(1, 1, \dfrac{1}{3}\right)$ o también **v** (3, 3, 1).

De la figura se deduce que un vector director de la recta t, perpendicular común a r y s, es el producto vectorial de **u**(1, 1, 1) por **v**(3, 3, 1):

$$\mathbf{t} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \right);$$

$$\mathbf{t}(-2, 2, 0).$$

Sea X(x, y, z) un punto genérico de la recta t buscada.

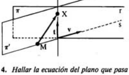


Si se considera un punto cualquiera de la recta r, por ejemplo el O(0, 0, 0), los vectores $\mathbf{OX} = (x - 0, y - 0, z - 0) = (x, y, z)$, **u**(1, 1, 1) y **t**(−2, 2, 0) están en un mismo plano, el π; por tanto:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} \pi: -2x - 2y + 4z = 0 \\ \pi: x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Si se toma un punto cualquiera de la recta s, por ejemplo el M(0, 0, 1/3), los vectores $\mathbf{MX} = (x - 0, y - 0, z - 1/3) = (x, y, z - 1/3)$, **v**(3, 3, 1) y **t**(−2, 2, 0) están en un mismo plano, el π'; por consiguiente:

$$\begin{vmatrix} x & y & z - 1/3 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} \pi': -2x - 2y + 12z - 4 = 0 \\ \pi': x + y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$$

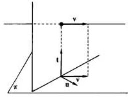


La recta t, perpendicular común buscada, es la intersección de dichos planos, es decir, las ecuaciones de t son:

$$t: \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$$

4. *Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto* A(1, 0, −1), *es perpendicular al plano* $x - y + 2z + 1 = 0$ *y es paralelo a la recta* $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

Un vector asociado del plano dado es **u**(1, −1, 2).



La recta se puede escribir: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1/2} = \dfrac{z - 1}{0}$.

Un vector de dirección de la recta es $\mathbf{v}\left(1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ o también **v**(2, 1, 0).

Vector asociado del plano buscado es el **t**, producto vectorial de **u**(1, −1, 2) y **v**(2, 1, 0):

$$\mathbf{t} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right);$$

$$\mathbf{t} = (-2, 4, 3).$$

Como, además, pasa por el punto A(1, 0, −1), la ecuación del plano es:

$$-2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 0) + 3 \cdot (z + 1) = 0 \rightarrow -2x + 4y + 3z + 5 = 0.$$

5. *Dadas las rectas* r: $\begin{cases} x = az + 2 \\ y = z - 3 \end{cases}$ *y* s: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{b} = z$, *se pide:*

a) *Determinar* a *y* b *para que sean ortogonales y coplanarias.*

b) *Para estos valores de* a *y* b, *hallar la ecuación del plano que contenga a las rectas* r *y* s.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

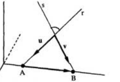
La recta r se puede escribir: $\dfrac{x-2}{a} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Un vector director de la recta r es $\mathbf{u}(a, 1, 1)$.

La recta s tiene un vector de dirección $\mathbf{v}(2, b, 1)$.

a) Para que r y s sean ortogonales tiene que ser cero el producto escalar de los vectores **u** y **v**:

$$(a, 1, 1) \cdot (2, b, 1) = 0 \to 2a + b + 1 = 0. \qquad \text{(I)}$$



Por otro lado, se determina la intersección de cada recta con un plano, por ejemplo, el Oxy: z = 0.

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 + 2 = 2 \\ y = 0 - 3 = -3 \end{array}\right\} \to A(2, -3, 0);$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{b} = 0 \to B(1, -1, 0);$$

$$\mathbf{AB} = (1, -1, 0) - (2, -3, 0) = (-1, 2, 0).$$

Para que las rectas r y s sean coplanarias, se tiene que cumplir:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to -1 + 4 + b - 2a = 0 \to -2a + b + 3 = 0. \qquad \text{(II)}$$

Resolviendo el sistema formado por (I) y (II), se obtienen los valores de a y b:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + b = -1 \\ -2a + b = -3 \end{array}\right\} \to 2b = -4;\ b = -2;\ a = \frac{-1-b}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) Para dichos valores: $\mathbf{u}\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ o $\mathbf{u}(1, 2, 2)$; $\mathbf{v}(2, -2, 1)$.

El plano queda fijado (por ejemplo) por el punto A(2, −3, 0) y los vectores (1, 2, 2) y (2, −2, 1):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to (x-2)(2+4) - (y+3)(1-4) + z(-2-4) = 0 \to$$
$$\to 2x + y - 2z - 1 = 0.$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Hallar el área del triángulo de vértices A(1, 1, 1), B(0, 3, 5) y C(4, 0, 2).

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

En la figura adjunta se aprecia que el área del triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo ABA′C; al ser el área del paralelogramo igual al módulo del producto vectorial **AB** × **AC**, el área del triángulo es:

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|.$$

$$\mathbf{AB} = (0,3,5) - (1,1,1) = (-1,2,4); \qquad \mathbf{AC} = (4,0,2) - (1,1,1) = (3,-1,1).$$

Simbólicamente, y siendo $\mathbf{u}_1 = \mathbf{i}(1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{j}(0,1,0)$ y $\mathbf{u}_3 = \mathbf{k}(0,0,1)$, se tiene:

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = 6\mathbf{i} + 13\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = (6,13,-5).$$

El módulo de $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$ es: $|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{6^2 + 13^2 + (-5)^2} = +\sqrt{230}$.

Por tanto, el área del triángulo ABC es: $A_t = +\dfrac{\sqrt{230}}{2}\ u^2$.

2. Hallar el área del triángulo de vértices A(0, 0, 0), B(1, 1, 0) y el punto de corte de la recta $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = z + 2$ y el plano Oxy.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Para hallar el punto de corte C de la recta (r) dada y el plano Oxy se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

Como la ecuación del plano Oxy es $z = 0$, sustituyendo en la ecuación de la recta z por cero, se tiene:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = 0 + 2 = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 4 - 1 = 3 \\ y = 6 - 1 = 5 \end{cases} \rightarrow \text{ vértice } C(3,5,0).$$

Así pues, se procede igual que en el ejercicio anterior.

$$\mathbf{AB} = (1,1,0) - (0,0,0) = (1,1,0); \qquad \mathbf{AC} = (3,5,0) - (0,0,0) = (3,5,0).$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (0,0,2).$$

$$|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2 \rightarrow A_t = \frac{2}{2} = 1\ u^2.$$

3. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $2x + y + 3z = 6$ con los ejes coordenados. Deducir las ecuaciones de los lados del triángulo.

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

1) Para hallar los vértices A, B y C del triángulo se calculan los puntos de intersección del plano dado con los ejes coordenados, resolviendo los tres sistemas formados por la ecuación del plano y las dos ecuaciones de cada uno de los ejes. Sustituyendo sucesivamente en la ecuación del plano las ecuaciones de los ejes, se tienen los puntos de corte con:

$$\text{El eje Ox: } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 2x + 0 + 0 = 6 \rightarrow x = 3 \rightarrow \text{ vértice } A(3,0,0);$$

$$\text{el eje Oy: } \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + y + 0 = 6 \rightarrow y = 6 \rightarrow \text{ vértice } B(0,6,0);$$

$$\text{el eje Oz: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + 0 + 3z = 6 \rightarrow z = 2 \rightarrow \text{ vértice } C(0,0,2).$$

Para calcular el área del triángulo ABC se procede como en los dos ejercicios anteriores.

$$\mathbf{AB} = (0,6,0) - (3,0,0) = (-3,6,0); \qquad \mathbf{AC} = (0,0,2) - (3,0,0) = (-3,0,2).$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i} - 0\mathbf{j} - 0\mathbf{k} + 18\mathbf{k} + 6\mathbf{j} - 0\mathbf{i} = 12\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 18\mathbf{k} = (12,6,18).$$

$$|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{12^2 + 6^2 + 18^2} = \sqrt{6^2(2^2 + 1 + 3^2)} = 6\sqrt{14} \rightarrow$$

$$\rightarrow A_t = + \frac{6\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14}\ \mathrm{u}^2.$$

2) Las ecuaciones de los lados del triángulo son las de las rectas que los contienen. Cada una de dichas rectas queda determinada por un punto (uno de los dos vértices del triángulo que son extremos del lado correspondiente) y por un vector de dirección (definido por los dos vértices del triángulo que son los extremos del lado considerado). Así pues:

- El lado AB queda determinado por el vértice A y el vector de dirección **AB** y sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 0 + 6\lambda \\ z = 0 + 0\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} \dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y}{6}, \\ z = 0. \end{cases}$$

- El lado AC queda determinado por el vértice A y el vector director **AC** y sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 0 + 0\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} \dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{z}{2}, \\ y = 0. \end{cases}$$

- El lado BC queda determinado por el vértice B y el vector de dirección **BC** $= (0,0,2) - (0,6,0) = (0,-6,2)$ y sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 0 + 0\lambda \\ y = 6 - 6\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 - 6\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} \dfrac{y-6}{-6} = \dfrac{z}{2}, \\ x = 0. \end{cases}$$

4. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1, 2, 3), B(1, 1, 1) y C(0, 2, 1) y calcular el área del triángulo ABC.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1) El plano ABC queda determinado por los puntos A(1,2,3), B(1,1,1) y C(0,2,1). Por tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1-1 & 1-2 & 1-3 \\ 0-1 & 2-2 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + 2y - z - 3 = 0.$$

2) Para calcular el área del triángulo ABC se procede como en los ejercicios anteriores.

$$\mathbf{AB} = (1,1,1) - (1,2,3) = (0,-1,-2); \qquad \mathbf{AC} = (0,2,1) - (1,2,3) = (-1,0,-2).$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k} - \mathbf{k} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{i} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} = (2,2,-1).$$

$$|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \rightarrow A_t = \frac{3}{2}\ \mathrm{u}^2.$$

5. Dado el triángulo de vértices (1, 1, 1), (0, 3, 5) y (4, 0, 2), hallar su área y la longitud de sus tres alturas.

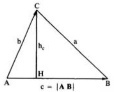
(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

1) Se calcula el área del triángulo ABC como en los ejercicios anteriores.

$$\mathbf{AB} = (0,3,5) - (1,1,1) = (-1,2,4); \qquad \mathbf{AC} = (4,0,2) - (1,1,1) = (3,-1,1).$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + \mathbf{k} - 6\mathbf{k} + \mathbf{j} + 4\mathbf{i} = 6\mathbf{i} + 13\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = (6,13,-5).$$

$$|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{6^2 + 13^2 + (-5)^2} = +\sqrt{230} \rightarrow A_t = +\frac{\sqrt{230}}{2}\ u^2.$$



2) Si se considera como base del triángulo ABC el lado c, la altura correspondiente a dicho lado es el segmento $CH = h_c$ y, por tanto, el área del triángulo se expresa:

$$A_t = \frac{1}{2}\,c \cdot h_c = \frac{1}{2}\,|\mathbf{AB}| \cdot h_c.$$

Por tanto, la altura correspondiente al lado c es:

$$h_c = \frac{2 \cdot A_t}{|\mathbf{AB}|}.$$

De forma análoga se obtienen las alturas correspondientes a los lados a y b:

$$h_a = \frac{2 \cdot A_t}{|\mathbf{BC}|}; \qquad h_b = \frac{2 \cdot A_t}{|\mathbf{AC}|}.$$

Se calculan las longitudes de los lados y se sustituyen en las fórmulas anteriores para hallar la medida de las tres alturas del triángulo.

- $|\mathbf{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2} = +\sqrt{21} \rightarrow h_c = \dfrac{+\sqrt{230}}{+\sqrt{21}} = +\sqrt{\dfrac{230}{21}}\ u.$

- $\mathbf{BC} = (4,0,2) - (0,3,5) = (4,-3,-3);$

  $|\mathbf{BC}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = +\sqrt{34} \rightarrow h_a = \dfrac{+\sqrt{230}}{+\sqrt{34}} = +\sqrt{\dfrac{115}{17}}\ u.$

- $|\mathbf{AC}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} = +\sqrt{11} \rightarrow h_b = \dfrac{+\sqrt{230}}{+\sqrt{11}} = +\sqrt{\dfrac{230}{11}}\ u.$

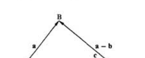
6. Dados los vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, del espacio tridimensional:

a) demostrar que forman un triángulo con el vector $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$;

b) hallar el área de dicho triángulo;

c) determinar la proyección del triángulo sobre un plano perpendicular al vector **k**.

(Propuesto en la Univ. de León.)



a) De acuerdo con la sustracción de vectores, los vectores **a**, **b** y **c** formarán un triángulo si se cumple que $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} - (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Por tanto, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$; es decir, los vectores **a**, **b** y **c** forman un triángulo ABC.

b) El área del triángulo ABC es: $A_t = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 9\mathbf{k} + 2\mathbf{k} - 15\mathbf{j} + 3\mathbf{i} = -7\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = (-7,-14,-7).$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(-7)^2 + (-14)^2 + (-7)^2} = \sqrt{7^2(1 + 2^2 + 1)} = +7\sqrt{6} \rightarrow A_t = +\frac{7\sqrt{6}}{2}\ \text{u}^2.$$

c) Un plano perpendicular al vector **k** es el plano coordenado Oxy o cualquier plano paralelo a él.

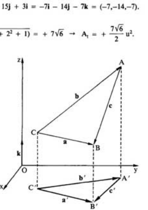
La proyección del triángulo ABC sobre cualquiera de dichos planos queda determinada por el triángulo A′B′C′, definido por las proyecciones de los vértices del triángulo ABC.

(Véase la figura adjunta.)

Es decir, la proyección del triángulo ABC está determinada por los vectores **a′**, **b′** y **c′**, proyecciones sobre un plano perpendicular al vector **k** de los vectores **a**, **b** y **c** que forman el triángulo ABC.

Como todos los vectores contenidos en el plano Oxy (o en cualquier plano paralelo a él) tienen su tercera componente $z = 0$, los vectores **a′**, **b′** y **c′** son:

$\mathbf{a}' = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{b}' = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{c}' = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.



7. Hallar el volumen del tetraedro de vértices (2, 2, 2), (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (1, 0, 1).

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Como se indica en el ejercicio **1** de los **ejercicios resueltos** de este mismo tema, el volumen del tetraedro es un sexto del volumen del paralelepípedo que se forma tomando como aristas (concurrentes en un punto) los tres vectores determinados por uno de los puntos con cada uno de los tres puntos restantes. Es decir, el volumen del tetraedro es un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

Considerando como origen de los tres vectores el punto A(2,2,2), los tres vectores son:

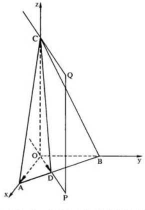
$$\mathbf{AB} = (1,0,0) - (2,2,2) = (-1,-2,-2); \quad \mathbf{AC} = (0,1,0) - (2,2,2) = (-2,-1,-2);$$

$$\mathbf{AD} = (1,0,1) - (2,2,2) = (-1,-2,-1).$$

$$\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{AC} \times \mathbf{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 - 8 + 2 + 4 + 4 = -3.$$

Por tanto, el volumen del tetraedro es: $V = \frac{1}{6} \cdot |-3| = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\ \text{u}^3$.

8. Hallar el volumen del tetraedro que forman los planos $y = 0$, $z = 0$, $x - y = 0$ y $3x + 2y + z = 15$. *(Propuesto en la Univ. de Santiago.)*



En la figura adjunta se ha representado el tetraedro OADC que forman los cuatro planos dados.

En dicha figura se corresponden los planos con sus ecuaciones de la forma siguiente:

$$\text{Plano Oxz} \rightarrow y = 0;$$

$$\text{plano Oxy} \rightarrow z = 0;$$

$$\text{plano OPQC} \rightarrow x - y = 0;$$

$$\text{plano ABC} \rightarrow 3x + 2y + z - 15 = 0.$$

Los vértices A y C del tetraedro son los puntos de corte del plano ABC con el eje Ox y el eje Oz, respectivamente. Por tanto:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 3x + 2y + z - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{vértice } A(5,0,0);$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x + 2y + z - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{vértice } C(0,0,15).$$

El vértice D del tetraedro es el punto de corte de los planos Oxy, OPQC y ABC. Es decir:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \\ 3x + 2y + z - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \\ 3x + 2x - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{vértice } D(3,3,0).$$

Los tres vectores que determinan el tetraedro son:

$$\mathbf{OA} = (5,0,0) - (0,0,0) = (5,0,0); \quad \mathbf{OD} = (3,3,0) - (0,0,0) = (3,3,0);$$

$$\mathbf{OC} = (0,0,15) - (0,0,0) = (0,0,15).$$

$$\mathbf{OA} \cdot (\mathbf{OD} \times \mathbf{OC}) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 15 = 225.$$

Por tanto, el volumen del tetraedro es: $V = \dfrac{1}{6} \cdot 225 = \dfrac{225}{6} = \dfrac{75}{2}\ u^3$.

9. Escribir la ecuación del plano determinado por los puntos $(0, 2, -2)$, $(3, 2, 1)$ y $(2, 3, 2)$ y calcular el volumen del tetraedro que limita con los ejes coordenados.

1) El plano ABC queda determinado por los puntos $A(0,2,-2)$, $B(3,2,1)$ y $C(2,3,2)$. Es decir, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 2 & z + 2 \\ 3 - 0 & 2 - 2 & 1 + 2 \\ 2 - 0 & 3 - 2 & 2 + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y - 2 & z + 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 2y - z - 6 = 0.$$

2) Los vértices del tetraedro son el origen O y los puntos A, B y C, intersección del plano anterior con los ejes coordenados. Así pues, los vértices A, B y C se calculan resolviendo los tres sistemas formados por la ecuación del plano y las dos ecuaciones de cada uno de los ejes. Sustituyendo sucesivamente en la ecuación del plano las ecuaciones de los ejes, se tienen los puntos de corte con:

El eje Ox: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow x + 0 - 0 - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \rightarrow$ vértice $A(6,0,0)$;

el eje Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + 2y - 0 - 6 = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow$ vértice $B(0,3,0)$;

el eje Oz: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + 0 - z - 6 = 0 \rightarrow z = -6 \rightarrow$ vértice $C(0,0,-6)$.

Considerando como origen de los tres vectores el punto $O(0,0,0)$, los tres vectores que definen el tetraedro son:

$$\mathbf{OA} = (6,0,0) - (0,0,0) = (6,0,0); \quad \mathbf{OB} = (0,3,0) - (0,0,0) = (0,3,0);$$

$$\mathbf{OC} = (0,0,-6) - (0,0,0) = (0,0,-6).$$

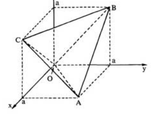
$$\mathbf{OA} \cdot (\mathbf{OB} \times \mathbf{OC}) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 \cdot (-6) = -108.$$

Por tanto, el volumen del tetraedro es: $V = \frac{1}{6} \cdot |-108| = 18 \text{ u}^3$.

10. Calcular el área y el volumen del tetraedro determinado por los puntos (0, 0, 0), (0, a, a), (a, 0, a) y (a, a, 0).

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

En la figura adjunta se ha representado el tetraedro OABC que determinan los cuatro puntos dados.



Se trata de un tetraedro regular, ya que tiene todas sus aristas iguales. En efecto:

$$OA = OB = OC = AB = AC = BC =$$
$$= \sqrt{a^2 + a^2} = + a\sqrt{2}.$$

1) El área del tetraedro es, pues, cuatro veces el área de una cualquiera de las caras.

El área de la cara (triángulo) ABC es:

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|.$$

$$\mathbf{AB} = (0,a,a) - (a,a,0) = (-a,0,a); \qquad \mathbf{AC} = (a,0,a) - (a,a,0) = (0,-a,a).$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a & 0 & a \\ 0 & -a & a \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + a^2\mathbf{k} - 0\mathbf{k} + a^2\mathbf{j} + a^2\mathbf{i} = a^2\mathbf{i} + a^2\mathbf{j} + a^2\mathbf{k} = (a^2,a^2,a^2).$$

$$|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{(a^2)^2 + (a^2)^2 + (a^2)^2} = + a^2\sqrt{3} \rightarrow A_t = + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \text{ u}^2.$$

Por tanto, el área del tetraedro es: $A_{tet} = + 2a^2\sqrt{3} \text{ u}^2$.

2) Considerando como origen de los tres vectores el punto O(0,0,0), los tres vectores que determinan el tetraedro son:

$$\mathbf{OA} = (a,a,0) - (0,0,0) = (a,a,0); \quad \mathbf{OB} = (0,a,a) - (0,0,0) = (0,a,a);$$

$$\mathbf{OC} = (a,0,a) - (0,0,0) = (a,0,a).$$

$$\mathbf{OA} \cdot (\mathbf{OB} \times \mathbf{OC}) = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 + a^3 = 2a^3.$$

Por consiguiente, el volumen del tetraedro es: $V_{tet} = \dfrac{1}{6} \cdot |2a^3| = \dfrac{|a^3|}{3}\ u^3.$

11. Dado el punto A(1, 0, 2) y las rectas r: $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = -4 \end{cases}$ y s: $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{2z-1}{4}$, obtener la ecuación del plano que pasa por el punto A y es paralelo a las rectas r y s.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

El plano pedido queda determinado por el punto A(1,0,2), un vector de dirección de la recta r y otro de la recta s, ya que el punto y los dos vectores están en el plano.

La recta r viene expresada por la intersección de dos planos; por tanto, un vector de dirección de ella es el vector producto vectorial de dos vectores asociados de los planos, un vector de cada plano.

Un vector asociado del plano $x - 2y + z - 1 = 0$ es el $\mathbf{v}(1,-2,1)$ y un vector asociado del plano $2x - y + z + 4 = 0$ es el $\mathbf{w}(2,-1,1)$; por consiguiente, un vector de dirección de la recta r es el $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} + 4\mathbf{k} - \mathbf{j} + \mathbf{i} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k} = (-1,1,3).$$

Un vector de dirección de la recta s $\left(\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{2} \right)$ es: $\mathbf{t}\,(-1,3,2)$.

Es decir, la ecuación del plano pedido es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 7x + y + 2z - 11 = 0.$$

12. Determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(2, 0, −3) y B(1, −1, 1) y es paralelo a la recta $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 2 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$.

(Propuesto en la Univ. del País Vasco.)

El plano (π) pedido queda determinado por el punto A(2,0,−3) dado, el vector **AB** y un vector de dirección **u** de la recta (r) dada, porque el punto y los dos vectores están en el plano.

El vector $\mathbf{AB} = (1,-1,1) - (2,0,-3) = (-1,-1,4)$.

La recta r viene expresada por la intersección de dos planos; uno de ellos tiene un vector asociado $\mathbf{v}(3,2,-3)$ y el otro, un vector asociado $\mathbf{w}(1,2,-2)$; por tanto, un vector de dirección de la recta r es el $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k} - 2\mathbf{k} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{i} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = (2,3,4).$$

Es decir, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 16x - 12y + z - 29 = 0.$$

13. Escribir la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas $\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-8}{4}$ y $x = y = z$.

El plano (π) pedido queda determinado por el punto O (0,0,0), un vector de dirección de la primera recta (r) y otro de la segunda (s), ya que el punto y los dos vectores están en el plano.

Un vector de dirección de la recta r es: $\mathbf{u}(2,3,4)$; un vector director de la recta s es: $\mathbf{v}(1,1,1)$.

Es decir, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0.$$

14. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1, 0, 1) y es paralelo al plano de las rectas $x - 2 = y - 1 = \frac{z}{3}$ y $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = t - 1 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

El plano (π) pedido queda determinado por el punto A(1,0,1), un vector director de la primera recta (r) y otro de la segunda (s), porque el punto y los dos vectores están en el plano.

Un vector de dirección de la recta r es: $\mathbf{u}(1,1,3)$; un vector director de la recta s es: $\mathbf{v}(1,-1,1)$.

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + y - z - 1 = 0.$$

15. Calcular el plano incidente con el punto P(3, −1, 1), que es paralelo a la recta r: $\begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = z \end{cases}$ y perpendicular al plano π: $2x + 3y - z + 5 = 0$.

El plano (π') pedido queda determinado por el punto P(3,−1,1), un vector de dirección de la recta r y un vector asociado del plano π, ya que el punto y los dos vectores están en el plano π'.

La recta r viene expresada por la intersección de los planos cuyos vectores asociados son, respectivamente, $\mathbf{v}(1,0,-2)$ y $\mathbf{w}(0,1,-1)$; es decir, un vector de dirección de la recta r es el $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$:

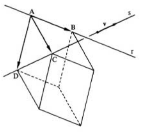
$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{k} + \mathbf{j} + 2\mathbf{i} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = (2,1,1).$$

Un vector asociado del plano π es: $\mathbf{t}(2,3,-1)$.

Por tanto, la ecuación del plano π' es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - y - z - 3 = 0.$$

16. Sean las rectas r y s de ecuaciones $\begin{cases} z = 2x + 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$ y $\dfrac{-x+2}{3} = \dfrac{y-1}{a} = \dfrac{z+1}{b}$. Hallar la condición que deben cumplir a y b para que r y s se crucen y sea paralela al plano $x + y + z + 1 = 0$.



Si las rectas r y s se cruzan, es distinto de cero el volumen del paralelepípedo que se puede construir sobre los vectores **AB**, **AC** y **AD**, siendo A y B dos puntos cualesquiera de la recta r y C y D dos puntos cualesquiera de la recta s.

(Véase la figura adjunta.)

Es decir, $\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{AC} \times \mathbf{AD}) \neq 0$, ya que ese producto mixto representa el volumen del paralelepípedo.

Se hallan los puntos A y B (cualesquiera) de la recta r dando dos valores (cualesquiera) a x en la ecuación de r y calculando los correspondientes valores de z e y:

Para $x = 0$: $\begin{cases} z = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \\ y = -3 \cdot 0 + 5 = 5 \end{cases} \rightarrow$ punto A(0,5,2);

para $x = 1$: $\begin{cases} z = 2 \cdot 1 + 2 = 4 \\ y = -3 \cdot 1 + 5 = 2 \end{cases} \rightarrow$ punto B(1,2,4).

Se determinan los puntos C y D (cualesquiera) de la recta s dando dos valores (cualesquiera) al parámetro λ en la ecuación de s, $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{a} = \dfrac{z+1}{b} = \lambda$, y calculando los correspondientes valores de x, z e y:

Para $\lambda = 0$: $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{a} = \dfrac{z+1}{b} = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \rightarrow \text{punto } C(2,1,-1);$$

para $\lambda = 1$: $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{a} = \dfrac{z+1}{b} = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2 = -3 \\ y - 1 = a \\ z + 1 = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = a + 1 \\ z = b - 1 \end{cases} \rightarrow \text{punto } D(-1,a+1,b-1).$$

Los vectores **AB**, **AC** y **AD** son:

$$\mathbf{AB} = (1,2,4) - (0,5,2) = (1,-3,2); \quad \mathbf{AC} = (2,1,-1) - (0,5,2) = (2,-4,-3);$$

$$\mathbf{AD} = (-1,a+1,b-1) - (0,5,2) = (-1,a-4,b-3).$$

Es decir:

$$\mathbf{AB}\cdot(\mathbf{AC}\times\mathbf{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ -1 & a-4 & b-3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow 7a + 2b - 51 \neq 0 \rightarrow 7a + 2b \neq 51.$$

Por otra parte, el vector $\mathbf{v}(-3,a,b)$, vector de dirección de la recta s, y el vector $\mathbf{w}(1,1,1)$, vector asociado del plano (π) dado, son perpendiculares, ya que la recta s es paralela al plano π; por tanto, el producto escalar $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ ha de ser cero:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = (-3,a,b)\cdot(1,1,1) = -3 + a + b = 0 \rightarrow a + b = 3.$$

Despejando el valor de a ($a = 3 - b$) y el de b ($b = 3 - a$) en la última igualdad y sustituyéndolos sucesivamente en la desigualdad $7a + 2b \neq 51$, se tiene:

$$7(3-b) + 2b \neq 51 \rightarrow 21 - 7b + 2b \neq 51 \rightarrow -5b \neq 30 \rightarrow b \neq -6;$$
$$7a + 2(3-a) \neq 51 \rightarrow 7a + 6 - 2a \neq 51 \rightarrow 5a \neq 45 \rightarrow a \neq 9.$$

Así pues, la condición que deben cumplir a y b para que las rectas r y s se crucen es: $a \neq 9$ y $b \neq -6$.

Se puede resolver también el problema proponiendo que se cumpla la condición para que dos rectas se crucen:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_2 - x_1 \\ u_2 & v_2 & y_2 - y_1 \\ u_3 & v_3 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

siendo $\mathbf{u}(u_1,u_2,u_3)$ y $\mathbf{v}(v_1,v_2,v_3)$ dos vectores de dirección, uno de cada una de las dos rectas, y $P(x_1,y_1,z_1)$ y $Q(x_2,y_2,z_2)$ dos puntos cualesquiera, uno de cada recta.

La recta r tiene un vector de dirección $\mathbf{u} = \mathbf{AB}(1,-3,2)$ y pasa por el punto $P = A(0,5,2)$; la recta s tiene un vector director $\mathbf{v}(-3,a,b)$ e incide en el punto $Q = C(2,1,-1)$.

Como las rectas r y s se cruzan, se cumple que:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2-0 \\ -3 & a & 1-5 \\ 2 & b & -1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & a & -4 \\ 2 & b & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow -7a - 2b + 51 \neq 0 \rightarrow 7a + 2b \neq 51.$$

A partir de aquí el problema se continúa como en el proceso anterior.

17. Se consideran las rectas r: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ y s: $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$. Se pide:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.

b) Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular a las rectas r y s.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

a) Para comprobar que las rectas r y s se cortan hay que verificar que es compatible y determinado el sistema formado por las ecuaciones de ambas.

Igualmente los valores de x, y, z en las ecuaciones paramétricas de las rectas, se tiene el sistema:

$$\begin{cases} x = \lambda + 1 = -2\mu + 3 \\ y = \lambda + 2 = -\mu + 3 \\ z = 2\lambda + 1 = 2\mu - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 3 - 1 = 2, \\ \lambda + \mu = 3 - 2 = 1, \\ 2\lambda - 2\mu = -1 - 1 = -2. \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones primera y tercera, resulta: $3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$.

Sustituyendo λ por cero en la primera ecuación, se deduce: $2\mu = 2 \rightarrow \mu = 1$.

Como los valores de λ y μ satisfacen la segunda ecuación $(0 + 1 = 1)$, el sistema es compatible y determinado, con solución única, que corresponde a las coordenadas del punto de intersección P.

El punto de corte es: $P(\lambda + 1, \lambda + 2, 2\lambda + 1) = (-2\mu + 3, -\mu + 3, 2\mu - 1) = (1,2,1)$.

b) La recta (t) pedida, perpendicular a las rectas r y s por su punto común P(1,2,1), queda determinada por el punto P y un vector **w**, perpendicular a las rectas r y s (y, por tanto, perpendicular a sus respectivos vectores de dirección **u** y **v**), ya que el vector **w** es un vector director de la recta t, por ser ésta perpendicular a las rectas r y s.

La recta r tiene un vector director **u**(1,1,2) y la s, un vector de dirección **v**(−2,−1,2). Como el vector **w** es perpendicular a ambos, $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k} + 2\mathbf{k} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{i} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + \mathbf{k} = (4,-6,1).$$

Es decir, la ecuación de la recta t es: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-6} = z - 1$.

18. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (1, 1, 1) y es perpendicular a las rectas r: $\begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ y s: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2}$.

El problema es idéntico al del apartado *b)* del ejercicio anterior.

La recta (t) pedida queda determinada por el punto P(1,1,1) y un vector de dirección **w**, perpendicular a las rectas r y s (y, por tanto, perpendicular a sus respectivos vectores de dirección **u** y **v**).

La recta r $\left(\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = z\right)$ tiene un vector de dirección **u**(−1,2,1) y la s, un vector director **v**(3,1,2). Por tanto, un vector de dirección de la recta t pedida es el $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k} - 6\mathbf{k} + 2\mathbf{j} - \mathbf{i} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = (3,5,-7).$$

Así pues, la ecuación de la recta t es: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-1}{-7}$.

19. Hallar la perpendicular común y que se apoya en las rectas del ejercicio 18.

Se averigua en primer lugar si las rectas r y s se cortan, porque en tal caso la recta (t') pedida pasaría por el punto de corte, ya que se apoyaría en (cortaría a) las dos rectas. Para ello el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas ha de ser compatible y determinado.

Igualando los valores de x, y, z en las ecuaciones paramétricas de las rectas, se origina el sistema:

$$\begin{cases} x = -\lambda + 1 = 3\mu - 2 \\ y = 2\lambda + 3 = \mu + 1 \\ z = \lambda = 2\mu - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\lambda - 3\mu = -2 - 1 = -3, \\ 2\lambda - \mu = 1 - 3 = -2, \\ \lambda - 2\mu = -1. \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones primera y tercera, resulta: $-5\mu = -4 \rightarrow \mu = \dfrac{4}{5}$.

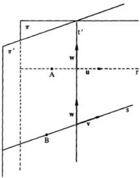
Sustituyendo este valor de μ en la tercera ecuación, se tiene: $\lambda = -1 + \dfrac{8}{5} = \dfrac{3}{5}$.

Como los valores de λ y μ no satisfacen la segunda ecuación $\left(\frac{6}{5} - \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \neq -2\right)$, el sistema es incompatible y las rectas r y s no se cortan.

Al ser $\frac{-1}{3} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$, los vectores de dirección de las rectas r y s no son proporcionales, por lo que éstas no son paralelas.

Por tanto, las rectas r y s se cruzan.

La perpendicular común (t'), que se apoya en las rectas r y s, es la intersección de dos planos π y π'. El primero contiene a la recta r y el segundo, a la s y ambos son paralelos a la recta t, hallada en el ejercicio anterior. Por tanto, la recta t' también es paralela a la t y, por consiguiente, perpendicular a las rectas r y s.



(Véase la figura adjunta.)

El plano π queda determinado por un punto (cualquiera) A(1,3,0) de la recta r, un vector de dirección $\mathbf{u}(-1,2,1)$ de esa misma recta y un vector director $\mathbf{w}(3,5,-7)$ de la recta t.

Es decir, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 19x + 4y + 11z - 31 = 0.$$

El plano π' queda determinado por un punto (cualquiera) B(−2,1,−1) de la recta s, un vector director $\mathbf{v}(3,1,2)$ de esa misma recta y un vector de dirección $\mathbf{w}(3,5,-7)$ de la recta t.

Así pues, la ecuación del plano π' es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z+1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 17x - 27y - 12z + 49 = 0.$$

Por tanto, las ecuaciones de la recta t' pedida son: $\begin{cases} 19x + 4y + 11z = 31, \\ 17x - 27y - 12z = -49. \end{cases}$

Nota: La recta t' viene expresada por la intersección de dos planos; uno de ellos tiene un vector asociado $\mathbf{p}(19,4,11)$ y el otro, un vector asociado $\mathbf{q}(17,-27,-12)$; por consiguiente, un vector de dirección de la recta t' es el $\mathbf{t} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$:

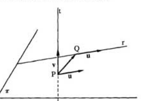
$$\mathbf{t} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 19 & 4 & 11 \\ 17 & -27 & -12 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = -48\mathbf{i} + 187\mathbf{j} - 513\mathbf{k} - 68\mathbf{k} + 228\mathbf{j} + 297\mathbf{i} = 249\mathbf{i} + 415\mathbf{j} - 581\mathbf{k}.$$

Obsérvese que el vector $\mathbf{t}(249,415,-581)$ es equivalente al $\mathbf{w}\left(\frac{249}{83}, \frac{415}{83}, -\frac{581}{83}\right) = (3,5,-7)$, que es un vector de dirección de la recta t. Es decir, las rectas t y t' son, en efecto, paralelas.

20. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (1, 1, 2) y es perpendicular al plano que incide con dicho punto y que contiene a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)



La recta (t) pedida queda determinada por el punto P(1,1,2) y un vector **v**, vector asociado del plano π, que es también un vector de dirección de la recta t, por ser ésta perpendicular al plano π.

(Véase la figura adjunta.)

El vector **v** es perpendicular a un vector director **u**(2,3,2) de la recta r y a otro vector **PQ**, siendo Q(1,0,1) un punto (cualquiera) de la recta r, puesto que ambos vectores están contenidos en el plano π. Es decir, $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{PQ}$.

El vector $\mathbf{PQ} = (1,0,1) - (1,1,2) = (0,-1,-1)$.

Por tanto, el vector de dirección **v** de la recta t es:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{PQ} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{k} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{i} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = (-1,2,-2).$$

La ecuación de la recta t es: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-2}$.

21. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a las rectas

$$r: \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad y \quad s: \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1}.$$

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

El problema es idéntico al ejercicio **18**.

La recta (t) pedida queda determinada por el punto O(0,0,0) y un vector de dirección **w**, perpendicular a las rectas r y s (y, por tanto, perpendicular a sus respectivos vectores de dirección **u** y **v**).

La recta r viene expresada por la intersección de dos planos; uno de ellos tiene un vector asociado **p**(2,−1,1) y el otro, un vector asociado **q**(1,1,−1); es decir, un vector director de la recta r es el $\mathbf{u} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} + \mathbf{k} + 2\mathbf{j} - \mathbf{i} = 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = (0,3,3) \text{ o } (0,1,1).$$

Un vector de dirección de la recta s $\left(\frac{x-1}{2} = \frac{y - \frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{z+1}{-1} \right)$ es $\mathbf{v}\left(2, -\frac{3}{2}, -1\right)$ o (4,−3,−2).

Por tanto, un vector director de la recta t pedida es el $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k} + 3\mathbf{i} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k} = (1,4,-4).$$

Así pues, la ecuación de la recta t es: $x = \frac{y}{4} = \frac{z}{-4}$.

22. Dadas las rectas r: $x = 3y = 5z$ y s, que pasa por los puntos (1, 1, 1) y (1, 2, −3), hallar la recta perpendicular a las rectas r y s por el punto (0, 1, 2).

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

El problema es idéntico al del ejercicio anterior.

La recta (t) pedida queda determinada por el punto P(0,1,2) y un vector de dirección **w**, perpendicular a las rectas r y s (y, por consiguiente, a sus respectivos vectores directores **u** y **v**).

Un vector de dirección de la recta r $\left(\frac{x}{1} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{5}} \right)$ es **u** $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \right)$ o (15,5,3).

La recta s tiene un vector director $\mathbf{v} = \mathbf{AB}$, siendo A y B los puntos por los que pasa la recta. Es decir, $\mathbf{v} = \mathbf{AB} = (1,2,-3) - (1,1,1) = (0,1,-4)$.

Por tanto, un vector director de la recta t pedida es el $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 15 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i} + 15\mathbf{k} + 60\mathbf{j} - 3\mathbf{i} = -23\mathbf{i} + 15\mathbf{k} + 60\mathbf{j} = (-23,60,15).$$

La ecuación de la recta t es: $\frac{x}{-23} = \frac{y-1}{60} = \frac{z-2}{15}$.

23. Hallar las ecuaciones de la recta que es perpendicular a las rectas s: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y t: $\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$ y pasa por el punto de corte de ambas.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

La recta (r) pedida queda determinada por el punto de corte (P) de las rectas s y t (en el caso de que las rectas se corten) y por un vector **w**, perpendicular a las rectas s y t (y, por tanto, perpendicular a sus respectivos vectores de dirección **u** y **v**).

Para hallar el punto de corte P se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas. Si el sistema es compatible y determinado, ambas rectas se cortan.

Igualando los valores de x, y, z en las ecuaciones paramétricas de las rectas, se tiene el sistema:

$$\begin{cases} x = 1 = \mu \\ y = 1 = \mu - 1 \\ z = \lambda - 2 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu = 1, \\ \mu = 2, \\ \lambda = 1. \end{cases}$$

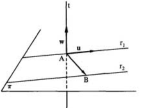
Como μ es, a la vez, igual a 1 y a 2, el sistema es incompatible; es decir, las rectas s y t no se cortan y, por tanto, no existe recta perpendicular a ellas que pase por el punto de corte.

24. Hallar las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto (1, 2, 0) y es perpendicular al plano que contiene a las rectas r_1: $\begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = -z + 4 \end{cases}$ y r_2: $\begin{cases} x = 2z + 5 \\ y = -z + 1 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

La recta (t) pedida queda determinada por el punto P(1,2,0) y un vector de dirección **w**, perpendicular al plano (π) que contiene a las rectas r_1 y r_2; el vector **w** es, pues, un vector asociado del plano π y perpendicular a los respectivos vectores directores **u** y **v** de las rectas r_1 y r_2.

Un vector de dirección de la recta $r_1 \left(\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = z \right)$ es: **u**(2,–1,1); un vector director de la recta $r_2 \left(\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-1} = z \right)$ es: **v**(2,–1,1). Como ambas rectas tiene un mismo vector de dirección (**u** = **v**), son rectas paralelas.



Al ser paralelas las rectas r_1 y r_2, no se puede determinar el vector **w** por el producto vectorial **u** × **v**, ya que dicho producto vectorial es nulo. Hay que hallar otro vector, contenido en el plano, determinado por dos puntos cualesquiera, uno de la recta r_1 y otro de la r_2; por ejemplo, el vector **AB**.

Si se consideran el punto A(3,4,0) de la recta r_1 y el punto B(5,1,0) de la recta r_2, el vector **AB** es:

$$\mathbf{AB} = (5,1,0) - (3,4,0) = (2,-3,0).$$

Es decir, un vector asociado del plano π, y vector de dirección de la recta t, es el $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{AB}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k} + 2\mathbf{k} + 3\mathbf{i} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k} = (3,2,-4).$$

La ecuación de la recta t es: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4}$.

25. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por P(1, 1, 0), está contenida en el plano $x - y - 3z = 0$ y es paralela a la recta $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

La recta r pedida queda determinada por el punto P(1,1,0) y un vector de dirección **u** de la recta (s) dada, por ser la recta r paralela a la s.

Un vector de dirección de la recta s es $\mathbf{u} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$, siendo **p** y **q** los respectivos vectores asociados de los dos planos cuya intersección es la recta s.

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3\mathbf{k} - 3\mathbf{k} = -6\mathbf{k} = (0,0,-6) \text{ o } (0,0,1).$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son: $\begin{cases} x = 1 + 0\lambda \\ y = 1 + 0\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = \lambda. \end{cases}$

No se ha tenido en cuenta la otra condición impuesta por el enunciado de que la recta t esté contenida en el plano $x - y - 3z = 0$. Para que se cumpla tal condición cualquier punto $(1,1,\lambda)$ de la recta t ha de pertenecer al plano; es decir, las coordenadas del punto han de verificar la ecuación del plano.

Como $1 - 1 - 3\lambda = 0$ sólo se cumple para $\lambda = 0$, si la recta t es paralela a la r, no puede estar contenida en el plano dado.

26. Dadas las rectas r: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ y s: $x = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-2}{-3}$, determinar un punto P sobre la recta r y otro Q sobre la s, tales que el vector **PQ** sea perpendicular a ambas rectas.

El enunciado del problema exige que las rectas r y s se crucen, ya que si no lo hicieran no existiría el vector **PQ** pedido.

Se va a comprobar que, en efecto, se cruzan resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

Igualando los valores de x, y, z en las ecuaciones paramétricas de las rectas, se origina el sistema:

$$\begin{cases} x = 1 + t = \lambda \\ y = -t = -2\lambda \\ z = 2 - 3t = -3\lambda + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\lambda + t = -1, \\ 2\lambda - t = 0, \\ 3\lambda - 3t = 0. \end{cases}$$

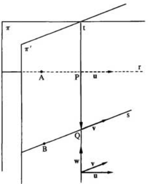
Sumando las ecuaciones primera y segunda, se obtiene: $\lambda = -1$.

Sustituyendo este valor de λ en la primera ecuación, resulta: $t = -1 - 1 = -2$.

Como los valores de t y λ no satisfacen la tercera ecuación ($-3 + 6 \neq 0$), el sistema es incompatible y las rectas r y s no se cortan.

Al ser $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-1}{-2} \neq \dfrac{-3}{-3}$, los vectores de dirección de las rectas r y s no son proporcionales, por lo que éstas no son paralelas.

Por consiguiente, las rectas r y s se cruzan, de acuerdo con lo que exige el enunciado del problema.



Los puntos P y Q, que determinan el vector **PQ**, están en la recta t, perpendicular común a las rectas r y s y que se apoya en ellas.

La recta r tiene un vector de dirección $\mathbf{u}(1,-1,-3)$ y pasa por el punto $A(1,0,2)$; la recta s tiene un vector director $\mathbf{v}(1,-2,-3)$ y pasa por el punto $B(0,0,2)$.

La recta t viene expresada por la intersección de dos planos π y π' y tiene un vector de dirección $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, ya que el vector $\mathbf{w}$ es perpendicular a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, por ser la recta t perpendicular a las rectas r y s.

El vector w es:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{i} - \mathbf{k} = (-3,0,-1).$$

El plano π queda determinado por el punto $A(1,0,2)$ y los vectores $\mathbf{u}(1,-1,-3)$ y $\mathbf{w}(-3,0,-1)$. Por tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 10y - 3z + 5 = 0.$$

El plano π' queda determinado por el punto B(0,0,2) y los vectores $\mathbf{v}(1,-2,-3)$ y $\mathbf{w}(-3,0,-1)$. Así pues, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + 10y - 6z + 12 = 0 \rightarrow x + 5y - 3z + 6 = 0.$$

Por consiguiente, la ecuación de la recta t es: $\begin{cases} x + 10y - 3z = -5, \\ x + 5y - 3z = -6. \end{cases}$

El punto P es la intersección de las rectas r y t. Para hallar sus coordenadas se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas. Si el sistema es compatible y determinado, ambas rectas se cortan.

Sustituyendo los valores de x, y, z de las ecuaciones paramétricas de la recta r en las ecuaciones de la recta t, resulta el sistema:

$$\begin{cases} (1+t) + 10(-t) - 3(2-3t) = -5 \\ (1+t) + 5(-t) - 3(2-3t) = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5 = -5 \\ 5t = -1 \end{cases} \rightarrow t = -\frac{1}{5}.$$

El sistema es compatible y determinado; por tanto, las rectas r y t se cortan.

Reemplazando el valor de t en las ecuaciones paramétricas de la recta r, se tiene:

$$x = 1 + t = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}, \quad y = -t = \frac{1}{5},$$

$$z = 2 - 3t = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5} \rightarrow \text{punto } P\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right).$$

El punto Q es la intersección de las rectas s y t. Para determinar sus coordenadas se procede como en el cálculo de las coordenadas del punto P.

Sustituyendo los valores de x, y, z de las ecuaciones paramétricas ($x = \lambda$, $y = -2\lambda$, $z = -3\lambda + 2$) de la recta s en las ecuaciones de la recta t, resulta el sistema:

$$\begin{cases} \lambda + 10(-2\lambda) - 3(-3\lambda + 2) = -5 \\ \lambda + 5(-2\lambda) - 3(-3\lambda + 2) = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -10\lambda = 1 \\ -6 = -6 \end{cases} \rightarrow \lambda = -\frac{1}{10}.$$

Reemplazando el valor de λ en las ecuaciones paramétricas de la recta s, se tiene:

$$x = \lambda = -\frac{1}{10}, \quad y = -2\lambda = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$

$$z = -3\lambda + 2 = \frac{3}{10} + 2 = \frac{23}{10} \rightarrow \text{punto } Q\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{23}{10}\right).$$

Los puntos pedidos son: $P\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right)$ y $Q\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{23}{10}\right)$.

Nota 1ª: Las dos identidades ($-5 = -5$ y $-6 = -6$), obtenidas al hallar las coordenadas de los puntos P y Q, indican que la recta r está contenida en el plano π y que la recta s está contenida en el plano π'.

Nota 2ª: El vector $\mathbf{PQ} = \left(-\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{23}{10}\right) - \left(\frac{8}{10}, \frac{2}{10}, \frac{26}{10}\right) = \left(-\frac{9}{10}, 0, -\frac{3}{10}\right)$

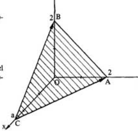
es perpendicular a los vectores **u** y **v**. En efecto:

$$\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{u} = \left(-\frac{9}{10}, 0, -\frac{3}{10}\right) \cdot (1,-1,-3) = -\frac{9}{10} - 0 + \frac{9}{10} = 0;$$

$$\mathbf{PQ}\cdot\mathbf{v} = \left(-\frac{9}{10}, 0, -\frac{3}{10}\right)\cdot(1,-2,-3) = -\frac{9}{10} - 0 + \frac{9}{10} = 0.$$

Como los dos productos escalares son nulos, el vector **PQ** es ortogonal a los vectores **u** y **v.**

27. Hallar la ecuación de un plano que pasa por los puntos A(0, 2, 0) y B(0, 0, 2) y corta al eje Ox en un punto C, tal que el área del triángulo ABC es 4 u^2.



Como el vértice C se encuentra sobre el eje Ox, es el punto C(a,0,0).

El triángulo ABC está determinado por los vectores **CA** y **CB.** Los vectores son:

$$\mathbf{CA} = (0,2,0) - (a,0,0) = (-a,2,0);$$

$$\mathbf{CB} = (0,0,2) - (a,0,0) = (-a,0,2).$$

El área del triángulo ABC es igual a la mitad del módulo del producto vectorial **CA** × **CB.** El producto vectorial es:

$$\mathbf{CA}\times\mathbf{CB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a & 2 & 0 \\ -a & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{CA}\times\mathbf{CB} = 4\mathbf{i} + 2a\mathbf{j} + 2a\mathbf{k} = (4,2a,2a).$$

El módulo de **CA** × **CB** es: $|\mathbf{CA}\times\mathbf{CB}| = \sqrt{16 + 4a^2 + 4a^2} = +\sqrt{16 + 8a^2}$.

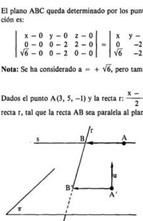
Por tanto, $+\frac{1}{2}\sqrt{16 + 8a^2} = 4 \rightarrow 16 + 8a^2 = 64 \rightarrow 8a^2 = 48 \rightarrow a = \sqrt{6}$.

El plano ABC queda determinado por los puntos A(0,2,0), B(0,0,2) y C($\sqrt{6}$,0,0). Es decir, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 0-2 & 2-0 \\ \sqrt{6}-0 & 0-2 & 0-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 0 & -2 & 2 \\ \sqrt{6} & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + \sqrt{6}y + \sqrt{6}z - 2\sqrt{6} = 0.$$

Nota: Se ha considerado $a = +\sqrt{6}$, pero también podría ser $a = -\sqrt{6}$.

28. Dados el punto A(3, 5, −1) y la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4}$, determinar un punto B de la recta r, tal que la recta AB sea paralela al plano $3x - 2y + z + 5 = 0$.



Sea el punto B(x_1,y_1,z_1). Por pertenecer a la recta r sus coordenadas verifican la ecuación de la recta r. Es decir:

$$\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{y_1 + 2}{1} = \frac{z_1 + 1}{4} = \lambda \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 2\lambda + 1, \\ y_1 = \lambda - 2, \\ z_1 = 4\lambda - 1. \end{cases}$$

Así pues, el punto es B($2\lambda + 1$, $\lambda - 2$, $4\lambda - 1$).

Las componentes del vector **AB** son:

$$\mathbf{AB} = (2\lambda + 1, \lambda - 2, 4\lambda - 1) - (3, 5, -1) = (2\lambda - 2, \lambda - 7, 4\lambda).$$

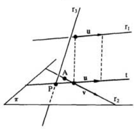
El vector **A'B'**, contenido en el plano (π) dado y paralelo al vector **AB**, tiene las mismas componentes que éste: **A'B'** $(2\lambda - 2, \lambda - 7, 4\lambda)$.

El vector $\mathbf{u}(3,-2,1)$, vector asociado del plano π, es perpendicular al vector **A'B'**; por tanto, el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{A'B'}$ es nulo:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A'B'} = (3,-2,1) \cdot (2\lambda - 2, \lambda - 7, 4\lambda) = 6\lambda - 6 - 2\lambda + 14 + 4\lambda = 0 \rightarrow 8\lambda = -8 \rightarrow \lambda = -1.$$

Sustituyendo λ por -1, se obtiene el punto: $B(-2 + 1, -1 - 2, -4 - 1) = (-1, -3, -5)$.

29. Hallar las ecuaciones de la recta t, paralela a la recta r_1: $x = y = z$, y que se apoya en las rectas r_2: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ y r_3: $\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t \end{cases}$



La recta t pedida queda determinada por el punto P, punto en el que se apoya en (corta a) la recta r_3, y por un vector de dirección $\mathbf{u}(1,1,1)$ de la recta r_1, que es también un vector director de la recta t, por ser ésta paralela a la r_1.

El punto P es la intersección de la recta r_3 con un plano (π), que contiene a las rectas r_2 y t.

Este plano π queda determinado por un punto (cualquiera) A de la recta r_2 y por los vectores de dirección **u** y **v** de las rectas t y r_2, ya que el punto y los dos vectores están contenidos en el plano π.

La recta r_2 tiene un vector director $\mathbf{v}(3,2,1)$ y pasa por el punto $A(1,0,-1)$.

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0.$$

Para hallar las coordenadas del punto P se resuelve el sistema formado por las ecuaciones del plano π y de la recta r_3.

Sustituyendo los valores de x, y, z de las ecuaciones paramétricas de r_3 en la ecuación del plano π, se obtiene:

$$(2t + 2) - 2(2t + 1) + (3t) = 0 \rightarrow t = 0.$$

Reemplazando el valor de t en las ecuaciones paramétricas de la recta r_3, resulta:

$$x = 2t + 2 = 2, \quad y = 2t + 1 = 1, \quad z = 3t = 0 \rightarrow \text{punto } P(2,1,0).$$

Por tanto, la ecuación de la recta t pedida es: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-0}{1} \rightarrow x - 2 = y - 1 = z.$

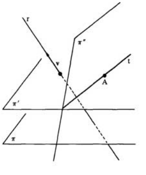
30. Dados el punto A(1, 0, 1), la recta r: $x - 1 = y - 1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano π: $x + y + z = 8$, determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto A, es perpendicular a la recta r y no corta al plano π.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Si la recta (t) pedida no corta al plano π dado, está contenida en un plano π', paralelo al π y que pasa por el punto A dado (punto que no pertenece al plano π).

La recta t es la intersección del plano π' con otro plano (π'') que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta r.

(Véase la figura adjunta.)



El plano π' queda determinado por el punto A(1,0,1) y un vector **u**(1,1,1), vector asociado del plano π, que es también un vector asociado del plano π', por ser éste paralelo al π.

Por tanto, la ecuación del plano π' es:

$$(x - 1) + (y - 0) + (z - 1) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x + y + z - 2 = 0.$$

El plano π'' queda determinado por el punto A(1,0,1) y un vector de dirección **v**(1,1,2) de la recta r, que es un vector asociado del plano π'', por ser éste perpendicular a la recta r.

Por consiguiente, la ecuación del plano π'' es:

$$(x - 1) + (y - 0) + 2(z - 1) = 0 \rightarrow x + y + 2z - 3 = 0.$$

Es decir, las ecuaciones de la recta t son: $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + y + 2z = 3. \end{cases}$

31. ¿Qué vectores son los que dan producto escalar nulo al multiplicarlos por un vector dado (no nulo) **a**? ¿Cuáles son los que dan producto vectorial nulo (vector cero) al multiplicarlos vectorialmente por este vector **a**?

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1) Como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{x}| \cdot \cos\alpha$, siendo α el ángulo formado por los vectores, y dado que por hipótesis $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, para que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$ ha de cumplirse una de estas dos condiciones:

   - Que $|\mathbf{x}| = 0$; es decir, que **x** sea el vector nulo: $\mathbf{x} = (0,0,0)$.
   - Que $\cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90°$ ($\circ\ \alpha = 270°$), lo que indica que los vectores **a** y **x** son ortogonales; es decir, los vectores **x** han de estar contenidos en planos perpendiculares al vector **a**.

2) Dado que el módulo de $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ es $|\mathbf{a} \times \mathbf{x}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{x}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$, siendo α el ángulo entre los vectores **a** y **x**, y como por hipótesis $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, para que $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha de cumplirse una de las dos condiciones:

   - Que $|\mathbf{x}| = 0$; es decir, que **x** sea el vector nulo: $\mathbf{x} = (0,0,0)$.
   - Que $\operatorname{sen}\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0°$ (o $\alpha = 180°$), lo que indica que los vectores **a** y **x** son paralelos; es decir, los vectores **x** han de estar contenidos en planos paralelos al vector **a**, lo que supone que las componentes de los vectores **x** deben ser proporcionales a las del vector **a**.

32. Siendo **a** y **b** dos vectores cualesquiera del espacio, probar que el producto escalar de **a** + **b** por **a** × **b** es siempre cero.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Sean los vectores $\mathbf{a}(a_1,a_2,a_3)$ y $\mathbf{b}(b_1,b_2,b_3)$. Se tiene:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1,a_2,a_3) + (b_1,b_2,b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3\mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{j} + a_1b_2\mathbf{k} - a_2b_1\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i};$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{k}.$

- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \cdot (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1);$

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (a_1 + b_1)(a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2 + b_2)(a_3b_1 - a_1b_3) + (a_3 + b_3)(a_1b_2 - a_2b_1);$

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 +$

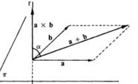
$+ a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 + a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 = 0.$

Queda, pues, probado que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

Se puede resolver también la cuestión de otra forma, con cálculo menos laborioso, en los dos supuestos siguientes:

- Los vectores **a** y **b** no son paralelos (sus componentes no son proporcionales):

  Como los vectores **a** y **b** son vectores libres se pueden trasladar, paralelamente a sí mismos, de modo que tengan el mismo origen.



El vector suma **a** + **b** está contenido en un plano π, ya que dicho vector es la diagonal del paralelogramo que se construye para realizar la adición de los dos vectores **a** y **b**.

El vector producto vectorial **a** × **b** está en la recta r y perpendicular al plano π.

Por tanto, los vectores **a** + **b** y **a** × **b** son ortogonales y, en consecuencia, el ángulo α que forman mide 90° (o 270°), con lo que $\cos \alpha = 0$.

Es decir: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot \cos \alpha = |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot 0 = 0.$

- Los vectores **a** y **b** son paralelos (sus componentes son proporcionales):

  En este caso el vector producto vectorial **a** × **b** es nulo, ya que su módulo $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \operatorname{sen} \alpha$ es cero, porque el ángulo α que forman los vectores **a** y **b** mide 0° (o 180°), con lo que sen 0° = 0 (o sen 180° = 0).

  Por tanto: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{0} = |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \cdot 0 \cdot \cos 0° = 0.$

33. Siendo **a** y **b** dos vectores cualesquiera del espacio, probar que $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial, se tiene:

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{b}.$$

Como $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (por ser $\alpha = 0°$ y sen 0° = 0), $-\mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (por ser $\beta = 180°$ y sen 180° = 0) y $-\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (por ser anticonmutativo el producto vectorial), se obtiene:

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{0} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{0} = 2\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Queda, pues, probada la igualdad propuesta.

TEMA II-3.1. Problemas métricos I

Ejercicios resueltos

1. *Determinar un punto de la recta* r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$ *que equidiste de los planos* $3x + 4y - 1 = 0$ *y* $4x - 3z - 1 = 0$.

   ¿Es única la solución?

   (Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

   La recta dada en forma paramétrica es: $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2 \cdot t \\ y = -1 + 3 \cdot t \\ z = -2 + 2 \cdot t \end{array}\right.$ (I)

   Un punto genérico de dicha recta es $P(1 + 2t, -1 + 3t, -2 + 2t)$. Por hipótesis del problema *equidista de cada plano*, es decir:

$$d(P, \pi) = d(P, \pi') \rightarrow \frac{3 \cdot (1 + 2t) + 4 \cdot (-1 + 3t) - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4(1 + 2t) - 3(-2 + 2t) - 1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{18t - 2}{\sqrt{25}} = \frac{2t + 9}{\sqrt{25}} \rightarrow 18t - 2 = \pm (2t + 9) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 18t - 2 = 2t + 9; \\ 18t - 2 = -2t - 9. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{De la primera: } 16t = 11 \rightarrow t = \frac{11}{16} \\ \text{De la segunda: } 20t = -7 \rightarrow t = \frac{-7}{20} \end{array}\right\} \text{ Sustituidas en (I):}$$

$$x = 1 + \frac{22}{16} = \frac{38}{16} = \frac{19}{8};\quad y = -1 + \frac{33}{16} = \frac{17}{16};\quad z = -2 + \frac{22}{16} = \frac{-10}{16} = -\frac{5}{8} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{19}{8}, \frac{17}{16}, \frac{-5}{8}\right);$$

$$x = 1 - \frac{14}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10};\quad y = -1 - \frac{21}{20} = \frac{-41}{20};\quad z = -2 - \frac{14}{20} = \frac{-54}{20} = \frac{-27}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{3}{10}, \frac{-41}{20}, \frac{-27}{10}\right).$$

   Se observa que la solución es doble.

2. *Para cada* t *se considera el plano* π_t *de ecuación:* $(1 + 2t) \cdot x + (1 - t) \cdot y + (1 + 3t) \cdot z + 2t - 1 = 0$.

   Demostrar que todos los planos π_t *pasan por una recta* r *y hallar la mínima distancia entre las rectas* r *y* r': $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$.

   (Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

   La ecuación de los planos se puede escribir:

$$x + 2xt + y - yt + z + 3zt + 2t - 1 = 0 \rightarrow (x + y + z - 1) + t \cdot (2x - y + 3z + 2) = 0.$$

Radiación de planos que determinan la *recta-eje* r: $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0; \\ 2x - y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$

Como en el sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \end{cases}$, con $n = 3$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow r = r^+ = 2.$

Por el teorema de Rouché, es *sistema compatible* e *indeterminado* (con *un* grado de libertad); por tanto, los planos se cortan en una recta r.

Dado que dicho sistema se ha elegido para todo valor de t: todos los planos π_t se cortan en la recta r.

Calculemos ahora la mínima distancia entre r y r'. Sean dos puntos cualesquiera de r:

Para $y = 0$: $\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + 3z = -2 \end{cases} \rightarrow A(5, 0, -4)$; para $y = 1$: $\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + 3z = -1 \end{cases} \rightarrow B(1, 1, -1)$.

Se consideran dos puntos cualesquiera de la recta r': $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$:

$A'(1, -1, 2)$, $B'(1 + 1, 2 - 1, 3 + 2) = (2, 1, 5)$.

Por (6):

$\mathbf{AB} = (1, 1, -1) - (5, 0, -4) = (-4, 1, 3)$; $\mathbf{AA'} = (1, -1, 2) - (5, 0, -4) = (-4, -1, 6)$;

$\mathbf{A'B'} = (2, 1, 5) - (1, -1, 2) = (1, 2, 3)$.

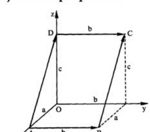
$$\text{det. } (\mathbf{AB}, \mathbf{AA'}, \mathbf{A'B'}) = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 57;$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{A'B'} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-3, 15, -9).$$

$$|\mathbf{AB} \times \mathbf{A'B'}| = \sqrt{(-3)^2 + 15^2 + (-9)^2} = \sqrt{9 + 225 + 81} = \sqrt{315}.$$

$$\delta = \frac{57}{\sqrt{315}} = \frac{57}{3\sqrt{35}} = \frac{19}{\sqrt{35}} \rightarrow \delta = + \frac{19\sqrt{35}}{35}.$$

Ejercicios propuestos



1. Sean los puntos A(a, 0, 0), B(a, b, 0), C(0, b, c) y D(0, 0, c). ¿Qué figura plana determinan los segmentos AB, BC, CD y DA? Calcular la longitud de sus lados y su área.

1) Como se aprecia en la figura adjunta, los segmentos AB, BC, CD y DA determinan un paralelogramo, porque los vectores **AB** y **DC** y los vectores **AD** y **BC** son equipolentes. En efecto:

El vector $\mathbf{AB} = (a, b, 0) - (a, 0, 0) = (0, b, 0)$;
el vector $\mathbf{DC} = (0, b, c) - (0, 0, c) = (0, b, 0)$;
el vector $\mathbf{AD} = (0, 0, c) - (a, 0, 0) = (-a, 0, c)$;
el vector $\mathbf{BC} = (0, b, c) - (a, b, 0) = (-a, 0, c)$;

2) La longitud de cada lado del paralelogramo es el módulo del vector correspondiente. Es decir:

$$\text{Lado AB} = \text{lado DC} = \sqrt{0^2 + b^2 + 0^2} = b;$$

$$\text{lado AD} = \text{lado BC} = \sqrt{(-a)^2 + 0^2 + c^2} = +\sqrt{a^2 + c^2}.$$

3) El área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial **AB** × **AD**:

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = bc\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + ab\mathbf{k} = (bc, 0, ab).$$

Área del paralelogramo: $A_{ABCD} = |\mathbf{AB} \times \mathbf{AD}| = \sqrt{b^2c^2 + 0^2 + a^2b^2} = +b\sqrt{a^2 + c^2}\ u^2$.

Nota: El producto escalar de los vectores **AB** y **AD** es:

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AD} = (0, b, 0) \cdot (-a, 0, c) = 0 \cdot (-a) + b \cdot 0 + 0 \cdot c = 0.$$

Por tanto, los vectores **AB** y **AD** son ortogonales y el paralelogramo ABCD es un rectángulo. Así pues, su área se puede hallar por la fórmula general:

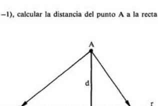
$$A_{ABCD} = \text{base} \cdot \text{altura} = AB \cdot AD = b \cdot (+\sqrt{a^2 + c^2}) = +b\sqrt{a^2 + c^2}\ u^2.$$

2. Dados los puntos A(1, 0, 1), B(3, 2, 1) y C(0, 1, −1), calcular la distancia del punto A a la recta determinada por los puntos B y C.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

La distancia d de un punto A a una recta r (determinada por otros dos puntos B y C) viene expresada por la fórmula:

$$d(A, r) = \frac{|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|}{|\mathbf{BC}|}.$$



Nota: Si no se considera el valor absoluto de la distancia, la distancia d es positiva cuando el punto A y el origen O están a distinto lado de la recta r y negativa cuando ambos puntos están al mismo lado de la recta r.

El vector **AB** = (3, 2, 1) − (1, 0, 1) = (2, 2, 0);
el vector **AC** = (0, 1, −1) − (1, 0, 1) = (−1, 1, −2);
el vector **BC** = (0, 1, −1) − (3, 2, 1) = (−3, −1, −2).

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{k} + 2\mathbf{k} + 4\mathbf{j} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = (-4, 4, 4);$$

$$|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = +4\sqrt{3};$$

$$|\mathbf{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = +\sqrt{14}.$$

Por tanto, la distancia d del punto A a la recta r, determinada por los puntos B y C, es:

$$d(A, r) = \frac{+4\sqrt{3}}{+\sqrt{14}} = \frac{+4\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}}{14} = \frac{+4\sqrt{42}}{14} = +\frac{2\sqrt{42}}{7}\ u.$$

3. Calcular razonadamente la distancia del punto P(3, −2, −1) a la recta $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ z = 3 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

Se hallan dos puntos cualesquiera (A y B) de la recta (r) y se procede como en el ejercicio anterior.

Para $y = 0$: $x = 5 \rightarrow$ punto A(5, 0, 3); para $y = 1$: $x = 7 \rightarrow$ punto B(7, 1, 3).

La distancia d del punto P a la recta r es: $d(P, r) = \dfrac{|\mathbf{PA} \times \mathbf{PB}|}{|\mathbf{AB}|}$.

El vector $\mathbf{PA} = (5, 0, 3) - (3, -2, -1) = (2, 2, 4)$;

el vector $\mathbf{PB} = (7, 1, 3) - (3, -2, -1) = (4, 3, 4)$;

el vector $\mathbf{AB} = (7, 1, 3) - (5, 0, 3) = (2, 1, 0)$.

$$\mathbf{PA} \times \mathbf{PB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 6\mathbf{k} - 8\mathbf{k} - 8\mathbf{j} - 12\mathbf{i} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = (-4, 8, -2);$$

$$|\mathbf{PA} \times \mathbf{PB}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 64 + 4} = \sqrt{84} = +2\sqrt{21};$$

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 1} = +\sqrt{5}.$$

Es decir, la distancia d del punto P a la recta r es:

$$d(P, r) = \frac{+2\sqrt{21}}{+\sqrt{5}} = \frac{+2\sqrt{21} \cdot \sqrt{5}}{5} = +\frac{2\sqrt{105}}{5} \text{ u.}$$

4. Hallar la distancia desde el origen de coordenadas a la recta $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

El problema se resuelve como en los dos ejercicios anteriores.

Se hallan dos puntos cualesquiera (A y B) de la recta (r):

Para $y = 0$: $\begin{cases} 2x = 4 \rightarrow x = 2 \\ 2x = z \rightarrow z = 4 \end{cases} \rightarrow$ punto A(2, 0, 4);

para $y = 2$: $\begin{cases} 2x = 10 \rightarrow x = 5 \\ 2x - 6 = z \rightarrow z = 4 \end{cases} \rightarrow$ punto B(5, 2, 4).

La distancia d del origen, punto O(0, 0, 0) a la recta r es: $d(0, r) = \dfrac{|\mathbf{OA} \times \mathbf{OB}|}{|\mathbf{AB}|}$.

El vector $\mathbf{OA} = (2, 0, 4) - (0, 0, 0) = (2, 0, 4)$;

el vector $\mathbf{OB} = (5, 2, 4) - (0, 0, 0) = (5, 2, 4)$;

el vector $\mathbf{AB} = (5, 2, 4) - (2, 0, 4) = (3, 2, 0)$.

$$\mathbf{OA} \times \mathbf{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 20\mathbf{j} + 4\mathbf{k} - 8\mathbf{j} - 8\mathbf{i} = -8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = (-8, 12, 4);$$

$$|\mathbf{OA} \times \mathbf{OB}| = \sqrt{(-8)^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 144 + 16} = \sqrt{224} = +4\sqrt{14};$$

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 4} = +\sqrt{13}.$$

Por tanto, la distancia d del origen a la recta r es:

$$d(O, r) = \frac{+4\sqrt{14}}{+\sqrt{13}} = \frac{+4\sqrt{14}\cdot\sqrt{13}}{13} = +\frac{4\sqrt{182}}{13}\ \text{u}.$$

5. Demostrar que el punto A(–1, 1, 0) no es coplanario con los puntos B(0, 0, 0), C(0, 1, 0) y D(1, 2, 1) y hallar la distancia del punto A al plano determinado por los puntos B, C y D.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

1) Para que el punto A no sea coplanario con los puntos B, C y D las coordenadas de A no han de verificar la ecuación del plano (π) determinado por B, C y D.

La ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0-0 \\ 1-0 & 2-0 & 1-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - z = 0.$$

Sustituyendo las coordenadas del punto A(–1, 1, 0) en la ecuación del plano π, resulta: $-1 - 0 = -1 \neq 0$. Es decir, el punto A no es coplanario con los puntos B, C y D, ya que las coordenadas de A no satisfacen la ecuación del plano π.

2) La distancia d de un punto $A(x_1, y_1, z_1)$ a un plano π: $ax + by + cz + e = 0$ viene expresada por la fórmula:

$$d(A, \pi) = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + e}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

Nota: Si no se considera el valor absoluto de la distancia, la distancia d es positiva cuando el punto A y el origen O están a distinto lado del plano π y negativa cuando ambos puntos están al mismo lado del plano π.

La distancia d del punto A(–1, 1, 0) al plano π es:

$$d(A, \pi) = \left| \frac{1\cdot(-1) + 0\cdot 1 - 1\cdot 0 + 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} \right| = \left| \frac{-1}{\sqrt{2}} \right| = +\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{u}.$$

6. Calcular la distancia del punto (a, b, c) al plano determinado por los puntos (a, 0, 0), (0, b, 0) y (0, 0, c).

Se procede como en el ejercicio anterior.

La ecuación del plano (π), determinado por los puntos B(a, 0, 0), C(0, b, 0) y D(0, 0, c), es:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \rightarrow bcx + acy + abz - abc = 0.$$

Por consiguiente, la distancia d del punto A(a, b, c) al plano π es:

$$d(A, \pi) = \left| \frac{bc\cdot a + ac\cdot b + ab\cdot c - abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}} \right| = \left| \frac{2abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}} \right|.$$

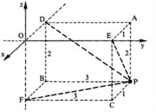
Realizando operaciones, se tiene:

$$d(A, \pi) = \left| \frac{2}{\sqrt{\dfrac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}}} \right| = \left| \frac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}} \right|.$$

Nota: La ecuación de un plano en función de los segmentos que intercepta en cada uno de los ejes coordenados, segmento a (en el eje Ox), b (en el eje Oy) y c (en el eje Oz), es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \rightarrow bcx + acy + abz - abc = 0.$$

7. Hallar las distancias del punto (−1, 3, −2) a los ejes coordenados y a los planos coordenados.



En la figura adjunta se ha representado el punto dado, P(−1, 3, −2).

En ella se observa que las coordenadas del punto son las distancias de éste a los planos coordenados, expresadas, respectivamente, por las longitudes de los segmentos PA, PB y PC.

En la figura se advierte también que las distancias del punto P a los ejes coordenados están determinadas, respectivamente, por las longitudes de los segmentos PD, PE y PF.

Por tanto, las distancias pedidas son:

1) Distancias a los planos coordenados:

$$d(P, Oxy) = PA = 2 \text{ u}; \quad d(P, Oxz) = PB = 3 \text{ u}; \quad d(P, Oyz) = PC = 1 \text{ u}.$$

2) Distancias a los ejes coordenados:

Se aplica el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos cuyas hipotenusas son los segmentos PD, PE y PF:

$$d(P, Ox) = PD = \sqrt{2^2 + 3^2} = +\sqrt{13} \text{ u}; \quad d(P, Oy) = PE = \sqrt{1^2 + 2^2} = +\sqrt{5} \text{ u};$$

$$d(P, Oz) = PF = \sqrt{1^2 + 3^2} = +\sqrt{10} \text{ u}.$$

Se podrían averiguar las distancias aplicando las correspondientes fórmulas; sin embargo, los cálculos son más laboriosos. Se hallan así las distancias del punto P al plano Oxy y al eje Ox; las demás se hallarían de igual forma.

1) La ecuación del plano Oxy es z = 0; por tanto, la distancia del punto P a dicho plano es:

$$d(P, Oxy) = \left| \frac{0 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 0}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{-2}{\sqrt{1}} \right| = 2 \text{ u}.$$

2) Se hallan dos puntos cualesquiera (G y H) del eje Ox y se procede como en el ejercicio **2.** Tales puntos pueden ser, por ejemplo, G(1, 0, 0) y H(2, 0, 0).

La distancia d del punto P al eje Ox es: $d(P, Ox) = \dfrac{|\mathbf{PG} \times \mathbf{PH}|}{|\mathbf{GH}|}$.

El vector $\mathbf{PG} = (1, 0, 0) - (-1, 3, -2) = (2, -3, 2)$;

el vector $\mathbf{PH} = (2, 0, 0) - (-1, 3, -2) = (3, -3, 2)$;

el vector $\mathbf{GH} = (2, 0, 0) - (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

$$\mathbf{PG} \times \mathbf{PH} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k} + 9\mathbf{k} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{i} = 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = (0, 2, 3);$$

$$|\mathbf{PG} \times \mathbf{PH}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = +\sqrt{13};$$

$$|\mathbf{GH}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Es decir, la distancia d del punto P al eje Ox es:

$$d(P, Ox) = \frac{+\sqrt{13}}{1} = +\sqrt{13}\ u.$$

8. Hallar la distancia entre los planos $x + y + z - 3 = 0$ y $3x + 3y + 3z - 5 = 0$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Se considera la distancia entre dos planos sólo cuando son paralelos.

La distancia d entre dos planos paralelos, π: $ax + by + cz + e = 0$ y π': $a'x + b'y + c'z + e' = 0$, viene expresa por la fórmula:

$$d(\pi, \pi') = \left| \frac{e'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} - \frac{e}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

Recuérdese que para que los planos anteriores π y π' sean paralelos los respectivos vectores asociados de los planos, $\mathbf{u}(a, b, c)$ y $\mathbf{u}'(a', b', c')$, han de ser proporcionales; es decir, se ha de cumplir que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{e}{e'}$. $\Big($Si se cumpliera $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{e}{e'}$ los planos serían coincidentes y la distancia d entre ellos sería nula.$\Big)$

Como $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{-3}{-5}$, los planos ($\pi$ y π') dados son paralelos y no coincidentes, por lo que la distancia d entre ellos es:

$$d(\pi, \pi') = \left| \frac{-5}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}} - \frac{-3}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{-5}{3\sqrt{3}} - \frac{-3}{\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{-5 + 9}{3\sqrt{3}} \right|;$$

$$d(\pi, \pi') = +\frac{4}{3\sqrt{3}} = +\frac{4\sqrt{3}}{9}\ u.$$

9. Hallar las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $P(1, -2, 3)$ y que es paralela a la recta r': $\begin{cases} x = 3z + 2 \\ y = 4 \end{cases}$

Determinar las distancias del punto P a las rectas r y r′ y la distancia entre las rectas r y r′.

(Propuesto en la Univ. de Valencia.)

1) Un vector de dirección de la recta dada r': $\begin{cases} \frac{x - 2}{3} = z \\ y = 4 \end{cases}$ es $\mathbf{u}(3, 0, 1)$, que es también un vector director de la recta pedida r, ya que ésta es paralela a la dada.

Como la recta r pasa por el punto $P(1, -2, 3)$, sus ecuaciones son: $\begin{cases} \frac{x - 1}{3} = z - 3, \\ y = -2. \end{cases}$

2) La distancia del punto P a la recta r es cero, porque el punto pertenece a la recta.

La distancia del punto P a la recta r′ y la distancia entre las rectas r y r′ son iguales, puesto que las rectas r y r′ son paralelas y el punto P pertenece a la recta r.

Para hallar dicha distancia d se determinan dos puntos cualesquiera (A y B) de la recta r' y se procede como en el ejercicio **2.**

Para $z = 0$: $x = 2 \rightarrow$ punto A(2, 4, 0); para $z = 1$: $z = 5 \rightarrow$ punto B(5, 4, 1).

La distancia d del punto P a la recta r' es: $d(P, r') = \dfrac{|\mathbf{PA} \times \mathbf{PB}|}{|\mathbf{AB}|}$.

El vector $\mathbf{PA} = (2, 4, 0) - (1, -2, 3) = (1, 6, -3)$;

el vector $\mathbf{PB} = (5, 4, 1) - (1, -2, 3) = (4, 6, -2)$;

el vector $\mathbf{AB} = (5, 4, 1) - (2, 4, 0) = (3, 0, 1)$.

$$\mathbf{PA} \times \mathbf{PB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 6 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k} - 24\mathbf{k} + 2\mathbf{j} + 18\mathbf{i} =$$

$$= 6\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 18\mathbf{k} = (6, -10, -18);$$

$$|\mathbf{PA} \times \mathbf{PB}| = \sqrt{6^2 + (-10)^2 + (-18)^2} = \sqrt{36 + 100 + 324} = \sqrt{460} = +2\sqrt{115};$$

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = +\sqrt{10}.$$

Es decir, la distancia d del punto P a la recta r' (y la distancia d entre las rectas r y r') es:

$$d(P, r') = d(r, r') = \frac{+2\sqrt{115}}{+\sqrt{10}} = +\frac{2\sqrt{1\,150}}{10} = +\frac{10\sqrt{46}}{10} = +\sqrt{46}\ \text{u.}$$

Se puede calcular también la distancia d anterior hallando la distancia entre el punto P y el punto de corte (Q) de la recta r' con un plano (π), trazado por el punto P y perpendicular a las rectas r y r'.

Un vector asociado del plano π es **u** (3, 0, 1), vector director de las rectas r y r', ya que el plano es perpendicular a las dos rectas. Como, además, el plano π pasa por el punto P(1, −2, 3), su ecuación es:

$$3(x - 1) + 0(y + 2) + (z - 3) = 0 \rightarrow 3x + z - 6 = 0.$$

Para hallar el punto de corte Q de la recta r' y el plano π se resuelve el sistema formado por sus ecuaciones. Sustituyendo en la ecuación del plano x por su valor en la recta r', se obtiene:

$$3(3z + 2) + z - 6 = 0 \rightarrow 10z = 0 \rightarrow z = 0.$$

Para $z = 0$: $x = 2$; $y = 4 \rightarrow$ punto Q(2, 4, 0).

La distancia d del punto P a la recta r' (y la distancia d entre las rectas r y r') es la distancia d entre los puntos P y Q:

$$d(P, r') = d(r, r') = d(P, Q) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (4 + 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{1 + 36 + 9} = +\sqrt{46}\ \text{u.}$$

10. Se pide la distancia del punto A(1, 2, 3) a la recta r: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y la ecuación del plano π que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta r.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

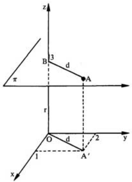
En la figura de la página siguiente se ha representado el punto dado A(1, 2, 3) y la recta dada r, que es el eje Oz.

1) En ella se observa que la distancia del punto P a la recta r está determinada por la longitud del segmento AB = A'O. Es decir:

$$d(P, r) = d(P, Oz) = AB = A'O = \sqrt{1^2 + 2^2} = +\sqrt{5}\ \text{u.}$$

2) El plano π, perpendicular a la recta r por el punto A, corta a dicha recta (eje Oz) en el punto B(0, 0, 3). Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$z = 3.$$



Se podría calcular la distancia por el procedimiento general, aunque la resolución resulta más laboriosa. Es decir:

1) Se hallan dos puntos cualesquiera (B y C) de la recta r(eje Oz); por ejemplo, B(0, 0, 3) y C(0, 0, 2).

La distancia d del punto A a la recta r (eje Oz) es:

$$d(P, r) = d(P, Oz) = \frac{|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|}{|\mathbf{BC}|}.$$

El vector $\mathbf{AB} = (0, 0, 3) - (1, 2, 3) = (-1, -2, 0)$;

el vector $\mathbf{AC} = (0, 0, 2) - (1, 2, 3) = (-1, -2, -1)$;

el vector $\mathbf{BC} = (0, 0, 2) - (0, 0, 3) = (0, 0, -1)$.

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k} - 2\mathbf{k} - \mathbf{j} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} = (2, -1, 0);$$

$$|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 1} = +\sqrt{5};$$

$$|\mathbf{BC}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

La distancia del punto P a la recta r (eje Oz) es:

$$d(P, r) = d(P, Oz) = \frac{+\sqrt{5}}{1} = +\sqrt{5}\text{ u}.$$

11. Hallar la distancia entre las rectas r: $\dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$ y s: $\dfrac{x-7}{6} = \dfrac{y+5}{-5} = \dfrac{z-2}{-2}$.

La distancia entre dos rectas en el espacio sólo tiene sentido cuando sean paralelas o cuando se crucen.

La recta r tiene un vector de dirección $\mathbf{u}(3, 2, -1)$ y pasa por el punto A(−5, −5, 2).

La recta s tiene un vector director $\mathbf{v}(6, -5, -2)$ y pasa por el punto B(7, −5, 2).

Como $\dfrac{3}{6} \neq \dfrac{2}{-5} \neq \dfrac{-1}{-2}$, los vectores de dirección no son proporcionales y las rectas no son paralelas (ni coincidentes).

Al ser $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 7+5 \\ 2 & -5 & -5+5 \\ -1 & -2 & 2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -48 - 60 = -108 \neq 0$, las rectas se cruzan.

Por tanto, la mínima distancia entre ellas es: $\delta = \left| \dfrac{\det.(\mathbf{u}, \mathbf{AB}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} \right|$.

El vector $\mathbf{AB} = (7, -5, 2) - (-5, -5, 2) = (12, 0, 0)$;

$$\det.(\mathbf{u}, \mathbf{AB}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 12 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 60 + 48 = 108;$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 6 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 15\mathbf{k} - 12\mathbf{k} + 6\mathbf{j} - 5\mathbf{i} = -9\mathbf{i} - 27\mathbf{k} = (-9, 0, -27);$$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-9)^2 + 0^2 + (-27)^2} = \sqrt{81 + 729} = \sqrt{810} = +9\sqrt{10}.$$

La distancia entre las rectas r y s es:

$$\delta = \left| \frac{108}{+9\sqrt{10}} \right| = +\frac{12\sqrt{10}}{10} = +\frac{6\sqrt{10}}{5}\ \text{u}.$$

12. Calcular las distancias de la recta $\begin{cases} x = 3z + 3 \\ y = 4z + 1 \end{cases}$ a los ejes coordenados.

(Propuesto en la Univ. de Oviedo.)

La recta dada $\left(r: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{4} = z \right)$ tiene un vector de dirección $\mathbf{u}(3, 4, 1)$ y pasa por el punto $A(3, 1, 0)$. Por tanto, no es paralela a ninguno de los ejes coordenados.

Como ninguno de los puntos de la recta r tiene dos coordenadas nulas, ésta tampoco corta a los ejes coordenados; es decir, la recta r se cruza con cada uno de los ejes coordenados.

Por consiguiente, se trata de hallar las mínimas distancias entre la recta r y los ejes coordenados.

1) Distancia al eje Ox: $\delta_1 = \left| \dfrac{\det.(\mathbf{i}, \mathbf{OA}, \mathbf{u})}{|\mathbf{i} \times \mathbf{u}|} \right|$.

El vector $\mathbf{OA} = (3, 1, 0) - (0, 0, 0) = (3, 1, 0)$;

$$\det.(\mathbf{i}, \mathbf{OA}, \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4\mathbf{k} - \mathbf{j} = -\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = (0, -1, 4);$$

$$|\mathbf{i} \times \mathbf{u}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = +\sqrt{17}.$$

La distancia de la recta r al eje Ox es:

$$\delta_1 = \left| \frac{1}{+\sqrt{17}} \right| = +\frac{\sqrt{17}}{17}\ \text{u}.$$

2) Distancia al eje Oy: $\delta_2 = \left| \dfrac{\det.(\mathbf{j}, \mathbf{OA}, \mathbf{u})}{|\mathbf{j} \times \mathbf{u}|} \right|$.

$$\det.(\mathbf{j}, \mathbf{OA}, \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 3\mathbf{k} = (1, 0, -3);$$

$$|\mathbf{j} \times \mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = +\sqrt{10}.$$

La distancia de la recta r al eje Oy es:

$$\delta_2 = \left| \frac{-3}{+\sqrt{10}} \right| = +\frac{3\sqrt{10}}{10} \text{ u.}$$

3) Distancia al eje Oz: $\delta_3 = \left| \dfrac{\det. (\mathbf{k}, \mathbf{OA}, \mathbf{u})}{|\mathbf{k} \times \mathbf{u}|} \right|$.

$$\det. (\mathbf{k}, \mathbf{OA}, \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 3 = 9;$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{i} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = (-4, 3, 0);$$

$$|\mathbf{k} \times \mathbf{u}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

La distancia de la recta r al eje Oz es:

$$\delta_3 = \left| \frac{9}{5} \right| = \frac{9}{5} \text{ u.}$$

13. Hallar la condición que cumplen a y b para que las rectas r_a: $\begin{cases} x = az + 2 \\ y = z + 3 \end{cases}$ y r_b: $\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + b \end{cases}$ sean coplanarias y determinar los planos que, conteniendo a las rectas r_a y r_b, tienen la distancia mínima y máxima al punto (0, 0, 0).

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

1) Las dos rectas r_a y r_b son coplanarias si se cortan en un punto o si son paralelas.

- Para que las rectas se corten en un punto el sistema formado por sus ecuaciones ha de ser compatible y determinado:

$$\begin{cases} x = az + 2 = 2z + 1 \\ y = z + 3 = -z + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a-2)z = -1 \\ 2z = b - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-1}{a-2}, \\ z = \dfrac{b-3}{2}. \end{cases}$$

Para que el sistema sea compatible y determinado se ha de cumplir que:

$$\frac{-1}{a-2} = \frac{b-3}{2} \rightarrow (a-2)(b-3) = -2 \rightarrow ab - 3a - 2b + 6 = -2.$$

La condición para que las rectas sean coplanarias, como rectas que se cortan en un punto, es: $ab - 3a - 2b = -8$.

- Para que las rectas sean paralelas sus vectores de dirección deben ser proporcionales.

La recta r_a: $\dfrac{x-2}{a} = y - 3 = z$ tiene un vector de dirección $\mathbf{u}(a, 1, 1)$ y pasa por el punto A(2, 3, 0).

La recta r_b: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-b}{-1} = z$ tiene un vector director $\mathbf{v}(2, -1, 1)$ y pasa por el punto B(1, b, 0).

Como $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$, los vectores de dirección no son proporcionales y las rectas no son coplanarias, como rectas paralelas.

Por tanto, las rectas r_a y r_b sólo son coplanarias si se cortan en un punto y la condición que cumplen a y b es: $ab - 3a - 2b = -8$.

2) El plano π, que contiene a las rectas r_a y r_b, queda determinado por el punto $A(2, 3, 0)$ y los vectores $\mathbf{u}(a, 1, 1)$ y $\mathbf{v}(2, -1, 1)$, ya que el punto y los vectores están contenidos en el plano π, por pertenecer el punto A a la recta r_a y ser **u** y **v** los respectivos vectores de dirección de las rectas r_a y r_b.

Así pues, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-0 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, $(x - 2) + 2(y - 3) - az - 2z - a(y - 3) + (x - 2) = 0$.

Operando se obtiene la ecuación del plano π: $2x + (2 - a)y - (2 + a)z + 3a - 10 = 0$.

Como la ecuación del plano π depende del parámetro a, se trata en realidad de una radiación de planos; hay que determinar los dos planos de la radiación que tienen, respectivamente, la distancia mínima y máxima al origen.

La distancia d del origen $O(0, 0, 0)$ a un plano π: $ax + by + cz + e = 0$ viene expresada por la fórmula:

$$d(O, \pi) = \left| \frac{e}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

Por tanto, la función distancia d del origen $O(0, 0, 0)$ a cada uno de los planos π_i de la radiación es:

$$d(O, \pi_i) = \left| \frac{3a - 10}{\sqrt{2^2 + (2-a)^2 + (-2-a)^2}} \right| = \frac{|3a - 10|}{+\sqrt{12 + 2a^2}}.$$

La condición para que la distancia d sea mínima o máxima es que la derivada de d respecto de a sea nula, $\frac{d}{da}[d(O, \pi_i)] = 0$.

Se escribe la función $d(O, \pi_i)$ descompuesta en tramos, según el signo de $3a - 10$. Para ello se resuelve la ecuación $3a - 10 = 0 \rightarrow a = \frac{10}{3}$ y se estudia el signo de $3a - 10$ en los intervalos $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$ y $\left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$:

a	$\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$	$\left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$
$3a - 10$	$-$	$+$

Es decir, la función distancia equivale a $d(O, \pi_i) = \begin{cases} \dfrac{-3a + 10}{+\sqrt{12 + 2a^2}} \text{ si } a < \dfrac{10}{3}, \\ 0 \text{ si } a = \dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{3a - 10}{+\sqrt{12 + 2a^2}} \text{ si } a > \dfrac{10}{3}. \end{cases}$

Se deriva, respecto de a, la función descompuesta en tramos:

$$d'(O, \pi_i) = \begin{cases} \dfrac{-3\sqrt{12+2a^2} - \dfrac{4a(-3a+10)}{+2\sqrt{12+2a^2}}}{12+2a^2} = \dfrac{-3(12+2a^2) - (-6a^2+20a)}{+(12+2a^2)\sqrt{12+2a^2}} = \\ = \dfrac{-10a-18}{+(6+a^2)\sqrt{12+a^2}} \text{ si } a < \dfrac{10}{3}, \\ \text{no existe si } a = \dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{3\sqrt{12+2a^2} - \dfrac{4a(3a+10)}{+2\sqrt{12+2a^2}}}{12+2a^2} = \dfrac{3(12+2a^2) - (-6a^2+20a)}{+(12+2a^2)\sqrt{12+2a^2}} = \\ = \dfrac{10a+18}{+(6+a^2)\sqrt{12+2a^2}} \text{ si } a > \dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Igualando a cero la primera derivada, se obtiene:

$$10a + 18 = 0 \rightarrow a = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5}.$$

Como en $a = \frac{10}{3}$ no existe la primera derivada, pero sí existe la función, son puntos críticos aquellos en los que $a = -\frac{9}{5}$ y $a = \frac{10}{3}$.

Para averiguar cuál hace mínima y cuál máxima la función distancia, al exigir el cálculo de la segunda derivada operaciones bastante laboriosas, se estudia el signo de la primera derivada en en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{9}{5}\right), \left(-\frac{9}{5}, \frac{10}{3}\right)$ y $\left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$:

a	$\left(-\infty, -\frac{9}{5}\right)$	$\left(-\frac{9}{5}, \frac{10}{3}\right)$	$\left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$
$d'(O, \pi_i)$	+	−	+

En $a = -\frac{9}{5}$ la función distancia presenta máximo, porque la función primera derivada pasa de positiva (función distancia creciente) a negativa (función distancia decreciente); en $a = \frac{10}{3}$ la función distancia presenta mínimo, ya que la función primera derivada pasa de negativa (función distancia decreciente) a positiva (función distancia creciente). Por tanto:

- El plano π_1, que contiene a las rectas r_a y r_b y tiene distancia máxima al punto $O(0, 0, 0)$, es el que corresponde al valor $a = -\frac{9}{5}$; su ecuación es:

$$\pi_1: 2x + \left(2 + \frac{9}{5}\right)y - \left(2 - \frac{9}{5}\right)z + 3 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) - 10 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi_1: 2x + \frac{19}{5}y - \frac{1}{5}z - \frac{77}{5} = 0.$$

• El plano π_2, que contiene a las rectas r_a y r_b y tiene distancia mínima al punto O(0, 0, 0), es el que corresponde al valor $a = \frac{10}{3}$; su ecuación es:

$$\pi_2: 2x + \left(2 - \frac{10}{3}\right)y - \left(2 + \frac{10}{3}\right)z + 3 \cdot \frac{10}{3} - 10 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi_2: 2x - \frac{4}{3}y - \frac{16}{3}z = 0.$$

Nota 1ª: Obsérvese que el plano π_2 pasa por el origen, lo que está de acuerdo con que sea el plano que tiene la mínima distancia al punto O(0, 0, 0), puesto que su distancia a él es cero (la menor posible).

Nota 2ª: Si se hubiera hallado la ecuación de la radiación de planos π_i utilizando el punto B(1, b, 0) de la recta r_b en lugar del A(2, 3, 0) de la recta r_a, la ecuación resultaría:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-b & z-0 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, $(x - 1) + 2(y - b) - az - 2z - a(y - b) + (x - 1) = 0.$

Operando se obtiene la ecuación de la radiación π_i: $2x + (2 - a)y - (2 + a)z + ab - 2b - 2 = 0.$

Como $ab - 3a - 2b = -8$, resulta que $ab - 2b = 3a - 8$; sustituyendo $ab - 2b$ en la ecuación de la radiación, se obtiene:

$$\pi_i: 2x + (2 - a)y - (2 + a)z + 3a - 8 - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi_i: 2x + (2 - a)y - (2 + a)z + 3a - 10 = 0.$$

Obsérvese que es la misma ecuación que la obtenida a partir del punto A(2, 3, 0).

14. Hallar las ecuaciones de una recta r que pasando por el punto P(1, 1, 0) esté contenida en el plano $x - y - 3z = 0$ y sea paralela a la recta $\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{array}\right.$

Calcular la distancia entre las rectas r y r_a: $\left\{\begin{array}{l} 2x = 2az + 1 \\ y = z + a \end{array}\right.$

Determinar a para que la distancia sea $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

1) La recta pedida r queda determinada por el punto P(1, 1, 0) y un vector de dirección **u** de la recta dada (r'), por ser la recta r paralela a la r'.

La ecuación continua de la recta r': $\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{array}\right.$ es: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{2}}$; por tanto, un vector director de ella es $\mathbf{u}\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ o bien $\mathbf{v}(2, -1, 1)$.

Es decir, la ecuación continua de la recta r es:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{1} \rightarrow \frac{x-1}{2} = -y + 1 = z.$$

No se ha tenido en cuenta la otra condición impuesta por el problema de que la recta r esté contenida en el plano (π) $x - y - 3z = 0$. Ahora bien, para que la recta r esté contenida en el plano π basta que éste contenga dos puntos cualesquiera de ella.

Un punto de la recta r es $P(1, 1, 0)$ y otro punto de ella se obtiene dando un valor cualquiera, distinto de cero, al parámetro λ en la ecuación $\frac{x-1}{2} = -y + 1 = z = \lambda$.

Para $\lambda = 1$: $\frac{x-1}{2} = -y + 1 = z = 1 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \\ -y + 1 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow$ punto $Q(3, 0, 1)$.

Se comprueba si las coordenadas de los puntos P y Q verifican la ecuación del plano π.

Punto P: $1 - 1 - 3 \cdot 0 = 0$; punto Q: $3 - 0 - 3 \cdot 1 = 0$.

Como los puntos P y Q satisfacen la ecuación del plano π, la recta r está contenida en él.

Nota: Puede también comprobarse que la recta r está contenida en el plano π verificando que el vector $\mathbf{v}(2, -1, 1)$, vector de dirección de la recta r, y el vector $\mathbf{w}(1, -1, -3)$, vector asociado del plano π, son perpendiculares. En efecto:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (2, -1, 1) \cdot (1, -1, -3) = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Como el producto escalar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ es nulo, los dos vectores son perpendiculares y, por tanto, la recta r está contenida en el plano π.

2) Se estudia en primer lugar si las rectas son paralelas o si se cruzan (únicos casos en los que tiene sentido la distancia entre dos rectas en el espacio).

La recta r tiene un vector de dirección $\mathbf{v}(2, -1, 1)$ y pasa por el punto $P(1, 1, 0)$.

La ecuación continua de la recta r_a: $\begin{cases} 2x = 2az + 1 \\ y = z + a \end{cases}$ es: $\frac{x - \frac{1}{2}}{a} = \frac{y-a}{1} = \frac{z}{1}$; por tanto, tiene un vector director $\mathbf{v}_a(a, 1, 1)$ y pasa por el punto $A\left(\frac{1}{2}, a, 0\right)$.

Como $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1}$, los vectores de dirección no son proporcionales y las rectas no son paralelas (ni coincidentes).

$$\begin{vmatrix} 2 & a & \frac{1}{2} - 1 \\ -1 & 1 & a - 1 \\ 1 & 1 & 0 - 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & a - 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a(a-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2(a-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow a^2 - a + 1 - 2a + 2 = a^2 - 3a + 3.$$

Los valores de a que hacen cero el determinante son:

$$a^2 - 3a + 3 = 0 \rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \text{ (raíces imaginarias).}$$

Como no existe ningún valor real de a que haga cero el determinante, las rectas se cruzan.

Por tanto, la mínima distancia entre ellas es: $\delta = \left| \frac{\text{det. } (\mathbf{v}, \mathbf{PA}, \mathbf{v}_a)}{|\mathbf{v} \times \mathbf{v}_a|} \right|$.

El vector $\mathbf{PA} = \left(\frac{1}{2}, a, 0\right) - (1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, a - 1, 0\right)$;

$$\det.(\mathbf{v}, \mathbf{PA}, \mathbf{v}_a) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & a-1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(a-1) - \frac{1}{2} - a(a-1) - \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2a - 2 - 1 - a^2 + a = -a^2 + 3a - 3;$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v}_a = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + a\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + a\mathbf{k} - 2\mathbf{j} - \mathbf{i} =$$

$$= -2\mathbf{i} + (a-2)\mathbf{j} + (a+2)\mathbf{k} = (-2, a-2, a+2);$$

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{v}_a| = \sqrt{(-2)^2 + (a-2)^2 + (a+2)^2} = +\sqrt{12 + 2a^2}.$$

La distancia entre las rectas r y r_a es:

$$\delta = \left| \frac{-a^2 + 3a - 3}{+\sqrt{12 + 2a^2}} \right| = \frac{|-a^2 + 3a - 3|}{+\sqrt{12 + 2a^2}}.$$

3) Para que la distancia sea $\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, se ha de cumplir:

$$\frac{|-a^2 + 3a - 3|}{+\sqrt{12 + 2a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 2 \cdot |-a^2 + 3a - 3| = +\sqrt{3(12 + 2a^2)}.$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad, resulta:

$$4(a^4 - 6a^3 + 15a^2 - 18a + 9) = 36 + 6a^2 \rightarrow 4a^4 - 24a^3 + 60a^2 - 72a + 36 = 36 + 6a^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4a^4 - 24a^3 + 54a^2 - 72a = 0 \rightarrow 2a(2a^3 - 12a^2 + 27a - 36) = 0.$$

Las soluciones reales de la ecuación son a = 0 y a = 3,653. Sustituyendo estos valores de a en la expresión de la distancia δ entre las rectas r y r_a, se tiene:

$$\text{Para } a = 0: \delta = \frac{|-3|}{+\sqrt{12}} = \frac{3}{+2\sqrt{3}} = +\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866.$$

$$\text{Para } a = 3{,}653: \delta = \frac{|-13{,}344 + 10{,}959 - 3|}{+\sqrt{12 + 26{,}688}} = \frac{|-5{,}385|}{+\sqrt{38{,}688}} = \frac{5{,}385}{6{,}220} = 0{,}866.$$

15. Hallar los puntos, pertenecientes a la recta que pasa por los puntos (1, 2, 5) y (6, 5, 6), situados a una distancia 5 del origen de coordenadas.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

La recta (r) está determinada por los puntos A(1, 2, 5) y B(6, 5, 6). Su ecuación continua es:

$$\frac{x-1}{6-1} = \frac{y-2}{5-2} = \frac{z-5}{6-5} \rightarrow \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = z - 5.$$

Sean $P_i(x_i, y_i, z_i)$ los puntos, pertenecientes a la recta r, situados a una distancia de 5 unidades del origen O(0, 0, 0). Las coordenadas de tales puntos verifican el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \pm 5 \\ x - 1 = 5z - 25 \\ y - 2 = 3z - 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x = 5z - 24, \\ y = 3z - 13. \end{cases}$$

Sustituyendo en la primera ecuación los valores de x e y en función de z, se tiene:

$$(5z - 24)^2 + (3z - 13)^2 + z^2 = 25 \rightarrow 25z^2 - 240z + 576 + 9z^2 - 78z + 169 + z^2 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow 35z^2 - 318z + 720 = 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, resulta:

$$z = \frac{318 \pm \sqrt{101\,124 - 100\,800}}{70} = \frac{318 \pm \sqrt{324}}{70} = \frac{318 \pm 18}{70} \rightarrow$$

$$\rightarrow z_1 = \frac{336}{70} = \frac{24}{5}, \quad z_2 = \frac{300}{70} = \frac{30}{7}.$$

Reemplazando los dos valores de z en x e y, se deduce:

$$x_1 = 5 \cdot \frac{24}{5} - 24 = 0, \quad x_2 = 5 \cdot \frac{30}{7} - 24 = \frac{150 - 168}{7} = -\frac{18}{7};$$

$$y_1 = 3 \cdot \frac{24}{5} - 13 = \frac{72 - 65}{5} = \frac{7}{5}, \quad y_2 = 3 \cdot \frac{30}{7} - 13 = \frac{90 - 91}{7} = -\frac{1}{7}.$$

Los puntos pedidos son $P_1\left(0, \frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right)$ y $P_2\left(-\frac{18}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{30}{7}\right)$.

Nota: Se recomienda al lector que compruebe que los puntos P_1 y P_2 pertenecen a la recta r y que distan 5 unidades del origen de coordenadas.

TEMA II-3.2. ——————— Problemas métricos II

Ejercicios resueltos

1. *Sean los puntos* A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) *y* C(0, 0, 3). *El punto* D *es el simétrico del origen respecto al plano determinado por los puntos* A, B *y* C. *Calcular el volumen del tetraedro de vértices* A, B, C *y* D.

La ecuación del plano incidente con los puntos A, B y C es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 2-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 3-0 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$(x-1)6 - y(-3) + z \cdot 2 = 0 \rightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$

Un vector asociado a dicho plano es (6, 3, 2), que es un vector director de la recta perpendicular al plano por el punto (0, 0, 0). Por tanto, las ecuaciones de la recta son:

$$\frac{x-0}{6} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-0}{2}; \text{ expresadas en paramétricas: } \begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

Sustituyendo x, y, z en la ecuación del plano:

$$6 \cdot 6t + 3 \cdot 3t + 2 \cdot 2t - 6 = 0 \rightarrow 36t + 9t + 4t = 6 \rightarrow 49t = 6 \rightarrow t = \frac{6}{49}.$$

Por tanto: $x_H = 6 \cdot \frac{6}{49} = \frac{36}{49}$; $y_H = 3 \cdot \frac{6}{49} = \frac{18}{49}$; $z_H = 2 \cdot \frac{6}{49} = \frac{12}{49} \rightarrow$

$\rightarrow H\left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right).$

El simétrico D del origen, respecto a H es:

$$D\left(2 \cdot \frac{36}{49} - 0,\ 2 \cdot \frac{18}{49} - 0,\ 2 \cdot \frac{12}{49} - 0\right) = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right).$$

$$\mathbf{AD} = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right) - (1, 0, 0) = \left(\frac{23}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right);$$

$$\mathbf{BD} = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right) - (0, 2, 0) = \left(\frac{72}{49}, -\frac{62}{49}, \frac{24}{49}\right);$$

$$\mathbf{CD} = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right) - (0, 0, 3) = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, -\frac{123}{49}\right).$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 23 & 36 & 24 \\ 72 & -62 & 24 \\ 72 & 36 & -123 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{49^3} = \frac{705\,894}{705\,894} = 1\,u^3.$$

2. *Determinar el ángulo que forma la recta* x = y = z *con el eje* Oz.

Un vector director del eje Oz es **k**(0, 0, 1) y un vector director de la recta dada es **v**(1, 1, 1).

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = (0, 0, 1) \cdot (1, 1, 1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1.$

$|\mathbf{k}| = 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$

Por (3): $\cos(r, Oz) = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow$ áng. $(r, Oz) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54{,}7°.$

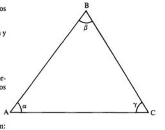
Solución de los ejercicios propuestos

1. Hallar los ángulos del triángulo de vértices en los puntos A(3, 4, −3), B(2, 0, −1) y C(−1, 3, 0).

El coseno del ángulo formado por dos vectores **a** y **b** viene expresado por la fórmula:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$

Cada uno de los ángulos del triángulo ABC está formado por los dos vectores que representan los lados que forman el ángulo.



Dichos vectores y sus correspondientes módulos son:

$$\mathbf{AB} = -\mathbf{BA} = (2, 0, -1) - (3, 4, -3) = (-1, -4, 2) \rightarrow |\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}| = \sqrt{1 + 16 + 4} = +\sqrt{21};$$

$$\mathbf{AC} = -\mathbf{CA} = (-1, 3, 0) - (3, 4, -3) = (-4, -1, 3) \rightarrow |\mathbf{AC}| = |\mathbf{CA}| = \sqrt{16 + 1 + 9} = +\sqrt{26};$$

$$\mathbf{BC} = -\mathbf{CB} = (-1, 3, 0) - (2, 0, -1) = (-3, 3, 1) \rightarrow |\mathbf{BC}| = |\mathbf{CB}| = \sqrt{9 + 9 + 1} = +\sqrt{19}.$$

Por tanto, los cosenos y las amplitudes de los ángulos del triángulo ABC son:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC}}{|\mathbf{AB}| \cdot |\mathbf{AC}|} = \frac{(-1, -4, 2) \cdot (-4, -1, 3)}{(+\sqrt{21}) \cdot (+\sqrt{26})} = \frac{4 + 4 + 6}{+\sqrt{546}} = \frac{14}{+\sqrt{546}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,cos} \frac{14}{+\sqrt{546}} \approx \operatorname{arc\,cos} 0{,}599 \approx 53^\circ\ 11'\ 29'';$$

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{BA} \cdot \mathbf{BC}}{|\mathbf{BA}| \cdot |\mathbf{BC}|} = \frac{(1, 4, -2) \cdot (-3, 3, 1)}{(+\sqrt{21}) \cdot (+\sqrt{19})} = \frac{-3 + 12 - 2}{+\sqrt{399}} = \frac{7}{+\sqrt{399}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \beta = \operatorname{arc\,cos} \frac{7}{+\sqrt{399}} \approx \operatorname{arc\,cos} 0{,}350 \approx 69^\circ\ 29'\ 9'';$$

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB}}{|\mathbf{CA}| \cdot |\mathbf{CB}|} = \frac{(4, 1, -3) \cdot (3, -3, -1)}{(+\sqrt{26}) \cdot (+\sqrt{19})} = \frac{12 - 3 + 3}{+\sqrt{494}} = \frac{12}{+\sqrt{494}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \gamma = \operatorname{arc\,cos} \frac{12}{+\sqrt{494}} \approx \operatorname{arc\,cos} 0{,}540 \approx 57^\circ\ 19'\ 22''.$$

Nota: Obsérvese que la suma de las amplitudes de los tres ángulos es igual a 180°.

2. Calcular el ángulo formado por las rectas: $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y + 1}{4} = \dfrac{z + 1}{5}$ y $\dfrac{x + 1}{-3} = \dfrac{y + 2}{-4} = \dfrac{z - 1}{5}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

El ángulo formado por dos rectas r y s es el que forman sus vectores de dirección.

Los respectivos vectores directores de las dos rectas (r y s) son **u**(3, 4, 5) y **v**(−3, −4, 5); los módulos de estos dos vectores son:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = +5\sqrt{2}; \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = +5\sqrt{2}.$$

Es decir, el coseno y la amplitud del ángulo formado por las rectas r y s son:

$$\cos(r, s) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{(3, 4, 5) \cdot (-3, -4, 5)}{(+5\sqrt{2}) \cdot (+5\sqrt{2})} = \frac{-9 - 16 + 25}{50} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{áng. } (r, s) = \text{arc cos } 0 = 90°.$$

Las rectas r y s son, por tanto, perpendiculares.

3. Hallar el ángulo que forman las rectas $x = y = z$ y $\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Un vector de dirección de la primera recta (r) es $\mathbf{u}(1, 1, 1)$.

Como la segunda recta (s) está expresada por la intersección de dos planos, tiene un vector director $\mathbf{v}$ igual al producto vectorial de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, cada uno de los cuales es un vector asociado de uno de los planos.

Un vector asociado del plano $x + z - 1 = 0$ es $\mathbf{a}(1, 0, 1)$ y un vector asociado del plano $y = 0$ es $\mathbf{b}(0, 1, 0)$; por tanto, un vector director de la recta s es $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} - \mathbf{i} = -\mathbf{i} + \mathbf{k} = (-1, 0, 1).$$

Los módulos de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = +\sqrt{3}; \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 0 + 1} = +\sqrt{2}.$$

Así pues, el coseno y la amplitud del ángulo formado por las rectas r y s son:

$$\cos(r, s) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{(1, 1, 1) \cdot (-1, 0, 1)}{(+\sqrt{3}) \cdot (+\sqrt{2})} = \frac{-1 + 0 + 1}{+\sqrt{6}} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{áng. } (r, s) = \text{arc cos } 0 = 90°.$$

Por tanto, las rectas r y s son perpendiculares.

4. Calcular el ángulo formado por la recta $r\colon x - 3 = \dfrac{y + 4}{2} = \dfrac{z}{2}$ y el plano $\pi\colon x + 2y + 2z = 4$.

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

El seno del ángulo que forman una recta r, que tiene un vector de dirección $\mathbf{u}$, y un plano π, del que se conoce un vector asociado $\mathbf{v}$, viene expresado por la fórmula:

$$\text{sen } (r, \pi) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}.$$

Un vector director de la recta r es $\mathbf{u}(1, 2, 2)$ y un vector asociado del plano π es $\mathbf{v}(1, 2, 2)$.

Los módulos de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3; \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Es decir, el seno y la amplitud del ángulo formado por la recta r y el plano π son:

$$\text{sen}(r, \pi) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{(1, 2, 2) \cdot (1, 2, 2)}{3 \cdot 3} = \frac{1 + 4 + 4}{9} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{áng.}(r, \pi) = \text{arc sen } 1 = 90°.$$

Por consiguiente, la recta r y el plano π son perpendiculares.

Nota: Como el vector de dirección **u** de la recta r y el vector asociado **v** del plano π son iguales, no es necesario hallar el seno del ángulo que forman la recta y el plano para conocer que éstos son perpendiculares.

5. Hallar el ángulo formado por el plano $2x + 3y = 0$ y la recta $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 9y + 8 = 0 \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. de Zaragoza.)

Un vector asociado del plano (π) es $\mathbf{v}(2, 3, 0)$.

Como la recta (r) está expresada por la intersección de dos planos, cuyos respectivos vectores asociados son $\mathbf{a}(1, -2, 3)$ y $\mathbf{b}(2, 9, 0)$, tiene un vector de dirección $\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k} + 4\mathbf{k} - 27\mathbf{i} = -27\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 13\mathbf{k} = (-27, 6, 13).$$

Los módulos de los vectores **u** y **v** son:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{729 + 36 + 169} = +\sqrt{934}; \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{4 + 9 + 0} = +\sqrt{13}.$$

Por tanto, el seno y la amplitud del ángulo formado por la recta r y el plano π son:

$$\text{sen}(r, \pi) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{(-27, 6, 13) \cdot (2, 3, 0)}{(+\sqrt{934}) \cdot (+\sqrt{13})} = \frac{-54 + 18 + 0}{+\sqrt{12\,142}} = \frac{-36}{+\sqrt{12\,142}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{áng.}(r, \pi) = \text{arc sen}\left(\frac{-36}{+\sqrt{12\,142}}\right) \approx \text{arc sen}(-0{,}327) \approx -19°\,4'\,8''.$$

El ángulo formado por la recta r y el plano π mide $19°\,4'\,8''$.

6. Calcular el ángulo determinado por los planos $2x - 3y + 2z = 0$ y $x + 2y + 2z = 4$.

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

El ángulo que forman dos planos π y π' es el formado por sus vectores asociados.

Los respectivos vectores asociados de los dos planos (π y π') son $\mathbf{a}(2, -3, 2)$ y $\mathbf{b}(1, 2, 2)$; los módulos de estos dos vectores son:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4 + 9 + 4} = +\sqrt{17}; \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Es decir, el coseno y la amplitud del ángulo formado por los planos π y π' son:

$$\cos(\pi, \pi') = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{(2, -3, 2) \cdot (1, 2, 2)}{(+\sqrt{17}) \cdot 3} = \frac{2 - 6 + 4}{+3\sqrt{17}} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{áng.}(\pi, \pi') = \text{arc cos } 0 = 90°.$$

Así pues, los planos π y π' son perpendiculares.

7. ¿Cuál es el ángulo que forman los planos $x + 2y - z = 3$ y $2x - y + 3z = 0$?

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Los respectivos vectores asociados de los dos planos (π y π') son $\mathbf{a}(1, 2, -1)$ y $\mathbf{b}(2, -1, 3)$; los módulos de estos dos vectores son:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1 + 4 + 1} = +\sqrt{6}; \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = +\sqrt{14}.$$

Por tanto, el coseno y la amplitud del ángulo formado por los planos π y π' son:

$$\cos(\pi, \pi') = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{(1, 2, -1) \cdot (2, -1, 3)}{(+\sqrt{6}) \cdot (+\sqrt{14})} = \frac{2 - 2 - 3}{+\sqrt{84}} = \frac{-3}{+2\sqrt{21}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{áng. } (\pi, \pi') = \text{arc cos}\left(\frac{-3}{+2\sqrt{21}}\right) \approx \text{arc cos}(-0{,}327) \approx 109^\circ\ 6'\ 24''.$$

El menor de los dos ángulos formados por los planos π y π' mide $180^\circ - 109^\circ\ 6'\ 24'' = 70^\circ\ 53'\ 36''$.

8. Calcular los ángulos determinados por el plano $2x - 3y + 2z = 0$ con cada uno de los planos Oxy, Oxz y Oyz.

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

Un vector asociado del plano (π) $2x - 3y + 2z = 0$ es $\mathbf{a}(2, -3, 2)$.

Los respectivos vectores asociados de los planos coordenados Oxy, Oxz y Oyz son $\mathbf{k}(0, 0, 1)$, $\mathbf{j}(0, 1, 0)$ e $\mathbf{i}(1, 0, 0)$.

Los módulos de los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4 + 9 + 4} = +\sqrt{17}; \qquad |\mathbf{i}| = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1;$$

$$|\mathbf{j}| = \sqrt{0 + 1 + 0} = 1; \qquad |\mathbf{k}| = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1.$$

1) El coseno y la amplitud del ángulo formado por los planos π y Oxy son:

$$\cos(\pi, \text{Oxy}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{k}|} = \frac{(2, -3, 2) \cdot (0, 0, 1)}{(+\sqrt{17}) \cdot 1} = \frac{2}{+\sqrt{17}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{áng. } (\pi, \text{Oxy}) = \text{arc cos}\left(\frac{2}{+\sqrt{17}}\right) \approx \text{arc cos } 0{,}485 \approx 60^\circ\ 58'\ 58''.$$

2) El coseno y la amplitud del ángulo que forman los planos π y Oxz son:

$$\cos(\pi, \text{Oxz}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{j}|} = \frac{(2, -3, 2) \cdot (0, 1, 0)}{(+\sqrt{17}) \cdot 1} = \frac{-3}{+\sqrt{17}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{áng. } (\pi, \text{Oxz}) = \text{arc cos}\left(\frac{-3}{+\sqrt{17}}\right) \approx \text{arc cos}(-0{,}728) \approx 136^\circ\ 41'\ 10''$$

El menor de los ángulos formados por los planos π y Oxz mide $180^\circ - 136^\circ\ 41'\ 10'' = 43^\circ\ 18'\ 50''$.

3) El coseno y la amplitud del ángulo que forman los planos π y Oyz son:

$$\cos(\pi, \text{Oyz}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{i}|} = \frac{(2, -3, 2) \cdot (1, 0, 0)}{(+\sqrt{17}) \cdot 1} = \frac{2}{+\sqrt{17}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{áng. } (\pi, \text{Oyz}) = \text{arc cos}\left(\frac{2}{+\sqrt{17}}\right) \approx \text{arc cos } 0{,}485 \approx 60^\circ\ 58'\ 58''$$

9. Determinar los vértices del triángulo simétrico del triángulo de vértices A(3, 4, −3), B(2, 0, −1) y C(−1, 3, 0) respecto al punto H(−2, 2, −2).

Dado un punto $A(x_1, y_1, z_1)$, las coordenadas del punto $A'(x_1', y_1', z_1')$, simétrico del punto A respecto de un centro de simetría $C(x_2, y_2, z_2)$, son:

$$x_1' = 2x_2 - x_1, \quad y_1' = 2y_2 - y_1, \quad z_1' = 2z_2 - z_1.$$

Por tanto, los vértices del triángulo A'B'C', simétrico del triángulo ABC dado respecto del centro de simetría H(−2, 2, −2), son:

$$A'[2(-2) - 3, 2 \cdot 2 - 4, 2(-2) + 3] \rightarrow A'(-7, 0, -1);$$

$$B'[2(-2) - 2, 2 \cdot 2 - 0, 2(-2) + 1] \rightarrow B'(-6, 4, -3);$$

$$C'[2(-2) + 1, 2 \cdot 2 - 3, 2(-2) - 0] \rightarrow C'(-3, 1, -4);$$

10. Determinar las ecuaciones de la recta simétrica de la recta x − 1 = y − 2 = z respecto al origen.

Se consideran dos puntos cualesquiera (A y B) de la recta (r) dada. Los puntos A' y B', simétricos de los puntos A y B respecto del centro de simetría O(0, 0, 0), determinan la ecuación de la recta (r') simétrica de la recta r respecto del origen.

Dando dos valores cualesquiera al parámetro λ en la ecuación x − 1 = y − 2 = z = λ, se obtienen las coordenadas de los puntos A y B de la recta r.

Para $\lambda = 0$: $x - 1 = y - 2 = z = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{punto } A(1, 2, 0);$$

para $\lambda = 1$: $x - 1 = y - 2 = z = 1 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \text{punto } B(2, 3, 1);$$

Los puntos A' y B', simétricos de los puntos A y B respecto del centro de simetría O(0, 0, 0), son:

$$A'(2 \cdot 0 - 1, 2 \cdot 0 - 2, 2 \cdot 0 - 0) \rightarrow A'(-1, -2, 0);$$

$$B'(2 \cdot 0 - 2, 2 \cdot 0 - 3, 2 \cdot 0 - 1) \rightarrow B'(-2, -3, -1).$$

La recta r', simétrica de la recta r respecto del origen, pasa por los puntos A' y B'; por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x + 1}{-2 + 1} = \frac{y + 2}{-3 + 2} = \frac{z - 0}{-1 - 0} \rightarrow x + 1 = y + 2 = z.$$

11. Hallar las ecuaciones del plano simétrico del plano x − y + z = 1 respecto al centro C(2, 0, −2).

Se consideran tres puntos cualesquiera no alineados (A, B y D) del plano (π) dado. Los puntos A', B' y D', simétricos de los puntos A, B y D respecto del centro de simetría C(2, 0, −2), determinan la ecuación del plano (π') simétrico del plano π respecto del centro C.

Dando sucesivamente valores arbitrarios a dos de las tres variables de la ecuación del plano π y calculando el valor de la otra variable, se obtienen los puntos A, B y D de dicho plano.

Para $x = 0$ e $y = 0$: $z = 1 - x + y = 1 - 0 + 0 = 1 \rightarrow$ punto $A(0, 0, 1)$;

para $x = 0$ y $z = 0$: $y = x + z - 1 = 0 + 0 - 1 = -1 \rightarrow$ punto $B(0, -1, 0)$;

para $y = 0$ y $z = 0$: $x = 1 + y - z = 1 + 0 - 0 = 1 \rightarrow$ punto $D(1, 0, 0)$.

Los puntos A', B' y D', simétricos de los puntos A, B y D respecto del centro de simetría $C(2, 0, -2)$, son:

$$A'[2 \cdot 2 - 0,\ 2 \cdot 0 - 0,\ 2(-2) - 1] \rightarrow A'(4, 0, -5);$$

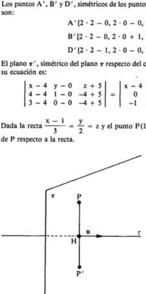
$$B'[2 \cdot 2 - 0,\ 2 \cdot 0 + 1,\ 2(-2) - 0] \rightarrow B'(4, 1, -4);$$

$$D'[2 \cdot 2 - 1,\ 2 \cdot 0 - 0,\ 2(-2) - 0] \rightarrow D'(3, 0, -4).$$

El plano π', simétrico del plano π respecto del centro C, pasa por los puntos A', B' y D'; por tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-0 & z+5 \\ 4-4 & 1-0 & -4+5 \\ 3-4 & 0-0 & -4+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & y & z+5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - y + z + 1 = 0.$$

12. Dada la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z$ y el punto $P(1, 2, -2)$, hallar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a la recta.



(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Dado un punto $P(x_1, y_1, z_1)$, para determinar las coordenadas del punto $P'(x_1', y_1', z_1')$, simétrico del punto P respecto de una recta r, se halla la ecuación del plano π que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r y se calculan las coordenadas del punto $H(x_2, y_2, z_2)$, punto de corte del plano y la recta. Este punto H es centro de simetría y, por tanto, punto medio del segmento PP'.

(Véase la figura adjunta.)

Un vector de dirección de la recta (r) dada es $\mathbf{u}(3, 2, 1)$, que es también un vector asociado del plano π por ser éste perpendicular a la recta r. Como, además, el plano pasa por el punto $P(1, 2, -2)$, su ecuación es:

$$3(x-1) + 2(y-2) + (z+2) = 0 \rightarrow 3x + 2y + z - 5 = 0.$$

Para calcular las coordenadas del punto H se resuelve el sistema formado por las ecuaciones del plano π y la recta r. Sustituyendo los valores x, y, z de las ecuaciones paramétricas de la recta ($x = 1 + 3\lambda$, $y = 2\lambda$, $z = \lambda$) en la ecuación del plano, se obtiene:

$$3(1 + 3\lambda) + 2(2\lambda) + \lambda - 5 = 0 \rightarrow 14\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

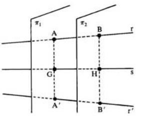
El plano y la recta se cortan en el punto H cuyas coordenadas son:

$$x = 1 + 3\lambda = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7},\quad y = 2\lambda = \frac{2}{7},\quad z = \lambda = \frac{1}{7} \rightarrow H\left(\frac{10}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right).$$

El punto P', simétrico del punto P respecto del centro de simetría H (y respecto de la recta r), es:

$$P'\left(2 \cdot \frac{10}{7} - 1,\ 2 \cdot \frac{2}{7} - 2,\ 2 \cdot \frac{1}{7} + 2\right) \rightarrow P'\left(\frac{13}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{16}{7}\right).$$

13. Determinar las ecuaciones de la recta simétrica de la recta $x - 1 = y - 2 = z$ respecto a la recta $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$



Se consideran dos puntos cualesquiera (A y B) de la primera recta (r) dada. Los puntos A' y B', simétricos de los puntos A y B respecto de la segunda recta (s) dada, determinan la ecuación de la recta (r') simétrica de la recta r respecto de la recta s.

(Véase la figura adjunta.)

Para hallar los puntos A' y B' se procede como en el ejercicio anterior.

Dando dos valores arbitrarios al parámetro λ en la ecuación $x - 1 = y - 2 = z = \lambda$, se obtienen las coordenadas de los puntos A y B de la recta r.

$$\text{Para } \lambda = 0\text{: } x - 1 = y - 2 = z = 0 \to \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \to \text{ punto } A(1, 2, 0);$$

$$\text{para } \lambda = 1\text{: } x - 1 = y - 2 = z = 1 \to \begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \to \text{ punto } B(2, 3, 1);$$

Como la recta s está expresada por la intersección de dos planos, cuyos respectivos vectores asociados son $\mathbf{a}(1, 0, 0)$ y $\mathbf{b}(0, 1, -2)$, tiene un vector de dirección $\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{k} + 2\mathbf{j} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k} = (0, 2, 1).$$

El vector $\mathbf{u}$ es también un vector asociado de los planos π_1 y π_2, por ser ambos perpendiculares a la recta s. Como, además, el plano π_1 pasa por el punto A(1, 2, 0) y el plano π_2 pasa por el punto B(2, 3, 1), sus respectivas ecuaciones son:

$$\pi_1\text{: } 0 \cdot (x - 1) + 2(y - 2) + (z - 0) = 0 \to \pi\text{: } 2y + z - 4 = 0;$$

$$\pi_2\text{: } 0 \cdot (x - 2) + 2(y - 3) + (z - 1) = 0 \to \pi'\text{: } 2y + z - 7 = 0.$$

Las coordenadas de los puntos G y H se calculan resolviendo los dos sitemas que forman la ecuación de la recta s con la del plano π_1 (punto G) y con la del plano π_2 (punto H). Sustituyendo sucesivamente los valores x, y, z de las ecuaciones paramétricas de la recta s ($x = 1$, $y = 3 + 2\lambda$, $z = \lambda$) en las ecuaciones de los planos π_1 y π_2, resulta:

$$\text{Para el punto G: } 0 \cdot 1 + 2(3 + 2\lambda) + \lambda - 4 = 0 \to 5\lambda + 2 = 0 \to \lambda = -\frac{2}{5};$$

$$\text{para el punto H: } 0 \cdot 1 + 2(3 + 2\lambda) + \lambda - 7 = 0 \to 5\lambda - 1 = 0 \to \lambda = \frac{1}{5};$$

El plano π_1 y la recta s inciden en el punto G que tiene las coordenadas:

$$x = 1, \quad y = 3 + 2\lambda = 3 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}, \quad z = -\frac{2}{5} \to G\left(1, \frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right).$$

El plano π_2 y la recta s se cortan en el punto H cuyas coordenadas son:

$$x = 1, \quad y = 3 + 2\lambda = 3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}, \quad z = \frac{1}{5} \to H\left(1, \frac{17}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

El punto A', simétrico del punto A respecto del centro de simetría G (y respecto de la recta s), es:

$$A'\left[2 \cdot 1 - 1, 2 \cdot \frac{11}{5} - 2, 2\left(-\frac{2}{5}\right) - 0\right] \rightarrow A'\left(1, \frac{12}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

El punto B', simétrico del punto B respecto del centro de simetría H (y respecto de la recta s), es:

$$B'\left(2 \cdot 1 - 2, 2 \cdot \frac{17}{5} - 3, 2 \cdot \frac{1}{5} - 1\right) \rightarrow B'\left(0, \frac{19}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

La recta r', simétrica de la recta r respecto de la recta s, está determinada por los puntos A' y B'; por tanto, su ecuación continua es:

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y - \frac{12}{5}}{\frac{19}{5} - \frac{12}{5}} = \frac{z + \frac{4}{5}}{-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}} \rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{5y-12}{7} = \frac{5z+4}{1}.$$

14. Hallar la ecuación del plano simétrico del plano $2x - y + z = 0$ respecto a la recta $x = y = z - 1$.

Se consideran tres puntos cualesquiera no alineados (A, B, C) del plano (π) dado. Los puntos A', B' y C', simétricos de los puntos A, B y C respecto de la recta (r) dada, determinan la ecuación del plano (π') simétrico del plano π respecto de la recta r.

Para hallar los puntos A', B' y C' se procede como en los dos ejercicios anteriores.

Dando valores arbitrarios a x e y en la ecuación del plano π y hallando los correspondientes valores de z, se obtienen los puntos A, B y C de dicho plano.

Para $x = 0$ e $y = 0$: $z = -2x + y = -0 + 0 = 0 \rightarrow$ punto A(0, 0, 0);

para $x = 1$ e $y = 0$: $z = -2x + y = -2 + 0 = -2 \rightarrow$ punto B(1, 0, −2);

para $x = 1$ e $y = 1$: $z = -2x + y = -2 + 1 = -1 \rightarrow$ punto C(1, 1, −1).

Un vector de dirección de la recta r es $\mathbf{u}(1, 1, 1)$, que es también un vector asociado de los planos π_1, π_2 y π_3, por ser los tres perpendiculares a la recta r. Como, además, el plano π_1 pasa por el punto A(0, 0, 0), el plano π_2 pasa por el punto B(1, 0, −2) y el plano π_3 pasa por el punto C(1, 1, −1), sus respectivas ecuaciones son:

$$\pi_1: (x-0) + (y-0) + (z-0) = 0 \rightarrow \pi_1: x + y + z = 0;$$

$$\pi_2: (x-1) + (y-0) + (z+2) = 0 \rightarrow \pi_2: x + y + z + 1 = 0;$$

$$\pi_3: (x-1) + (y-1) + (z+1) = 0 \rightarrow \pi_3: x + y + z - 1 = 0.$$

Las coordenadas de los puntos F, G y H, respectivos puntos medios de los segmentos AA', BB' y CC' (ya que F, G y H son centros de simetría), se calculan resolviendo los tres sistemas que forman la ecuación de la recta r con la del plano π_1 (punto F), con la del plano π_2 (punto G) y con la del plano π_3 (punto H). Sustituyendo sucesivamente los valores x, y, z de las ecuaciones paramétricas de la recta s ($x = \lambda$, $y = \lambda$, $z = 1 + \lambda$) en las ecuaciones de los planos π_1, π_2 y π_3, resulta:

Para el punto F: $\lambda + \lambda + (1 + \lambda) = 0 \rightarrow 3\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$;

para el punto G: $\lambda + \lambda + (1 + \lambda) + 1 = 0 \rightarrow 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$;

para el punto H: $\lambda + \lambda + (1 + \lambda) - 1 = 0 \rightarrow 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$.

El plano π_1 y la recta r se cortan en el punto F cuyas ordenadas son:

$$x = \lambda = -\frac{1}{3}, \quad y = \lambda = -\frac{1}{3}, \quad z = 1 + \lambda = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow F\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

El plano π_2 y la recta r inciden en el punto G que tiene las coordenadas:

$$x = \lambda = -\frac{2}{3}, \quad y = \lambda = -\frac{2}{3}, \quad z = 1 + \lambda = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow G\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

El plano π_3 y la recta r se cortan en el punto H cuyas coordenadas son:

$$x = \lambda = 0, \quad y = \lambda = 0, \quad z = 1 + \lambda = 1 + 0 = 1 \rightarrow H(0, 0, 1).$$

El punto A′, simétrico del punto A respecto del centro de simetría F (y respecto de la recta r), es:

$$A'\left[2\left(-\frac{1}{3}\right) - 0, 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 0, 2 \cdot \frac{2}{3} - 0\right] \rightarrow A'\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

El punto B′, simétrico del punto B respecto del centro de simetría G (y respecto de la recta r), es:

$$B'\left[2\left(-\frac{2}{3}\right) - 1, 2\left(-\frac{2}{3}\right) - 0, 2 \cdot \frac{1}{3} + 2\right] \rightarrow B'\left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

El punto C′, simétrico del punto C respecto del centro de simetría H (y respecto de la recta r), es:

$$C'(2 \cdot 0 - 1, 2 \cdot 0 - 1, 2 \cdot 1 + 1) \rightarrow C'(-1, -1, 3).$$

El plano π', simétrico del plano π respecto de la recta r, está determinado por los puntos A′, B′ y C′; por tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x + 1 & y + 1 & z - 3 \\ -\frac{2}{3} + 1 & -\frac{2}{3} + 1 & \frac{4}{3} - 3 \\ -\frac{7}{3} + 1 & -\frac{4}{3} + 1 & \frac{8}{3} - 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + 1 & y + 1 & z - 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Operando se obtiene la ecuación del plano π':

$$-\frac{1}{9}(x + 1) + \frac{20}{9}(y + 1) - \frac{1}{9}(z - 3) + \frac{4}{9}(z - 3) + \frac{1}{9}(y + 1) - \frac{5}{9}(x + 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{6}{9}(x + 1) + \frac{21}{9}(y + 1) + \frac{3}{9}(z - 3) = 0 \rightarrow -6(x + 1) + 21(y + 1) + 3(z - 3) = 0 \rightarrow$$

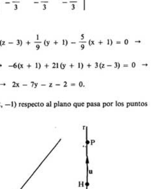
$$\rightarrow -6x + 21y + 3z + 6 = 0 \rightarrow 2x - 7y - z - 2 = 0.$$

15. Calcular el punto Q que es simétrico del punto P(1, 2, −1) respecto al plano que pasa por los puntos $M_1(1, -8, -3)$, $M_2(2, 0, -1)$ y $M_3(3, 8, 1)$.

(Propuesto en la Univ. del País Vasco.)

Dado un punto $P(x_1, y_1, z_1)$, para determinar las coordenadas del punto $P'(x_1', y_1', z_1')$, simétrico del punto P respecto de un plano π, se halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π y se calculan las coordenadas del punto $H(x_2, y_2, z_2)$, punto de corte del plano y la recta. Este punto H es centro de simetría y, por tanto, punto medio del segmento PP′.

(Véase la figura adjunta.)



La ecuación del plano π que pasa por los puntos dados, $M_1(1, -8, -3)$, $M_2(2, 0, -1)$ y $M_3(3, 8, 1)$, es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -8-0 & -3+1 \\ 3-2 & 8-0 & 1+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -8 & -2 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, $-16(x-2) - 2y - 8(z+1) + 8(z+1) + 2y + 16(x-2) = 0 \rightarrow 0 = 0.$

La identidad $0 = 0$ que resulta indica que los tres puntos dados, M_1, M_2 y M_3, están alineados. Por ellos pasan infinitos planos (la radiación de planos π_i cuyo eje es la recta que pasa por dos cualesquiera de dichos puntos, ya que los tres pertenecen a la misma recta s).

Nota: No es necesario desarrollar el determinante para conocer que su valor es cero; basta observar que las filas segunda y tercera son proporcionales.

El eje (recta s) de la radiación de planos π_i queda determinado por dos de los tres puntos dados; por ejemplo, por los puntos M_2 y M_3. Así pues, su ecuación es:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-0}{8-0} = \frac{z+1}{1+1} \rightarrow x-2 = \frac{y}{8} = \frac{z+1}{2} \rightarrow \begin{cases} 8x - y = 16, \\ 2x - z = 5. \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación de la radiación de planos π_i, para todo valor real de k, es:

$$8x - y - 16 + k(2x - z - 5) = 0 \rightarrow (8 + 2k)x - y - kz - (16 + 5k) = 0.$$

El problema se complica, porque la radiación de planos π_i se corresponde con un haz de rectas r_i que pasan por el punto P (cada recta es perpendicular a un solo plano de la radiación). Por consiguiente, existen infinitos puntos H_i (los de corte de cada pareja plano-recta perpendiculares entre sí) y, en consecuencia, hay infinitos puntos Q_i, simétricos todos ellos del punto P respecto de cada uno de los puntos H_i (y respecto de cada uno de los planos π_i de la radiación).

Un vector asociado de cada plano π_i de la radiación es $\mathbf{u}(8 + 2k, -1, -k)$, que es también un vector de dirección de cada recta r_i del haz, por ser cada pareja plano-recta perpendiculares entre sí. Por tanto, la ecuación continua y las ecuaciones paramétricas del haz de rectas r_i, para todo valor real de k, son:

$$\frac{x-1}{8+2k} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-k} = \lambda \rightarrow \begin{cases} x = 1 + (8 + 2k)\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = -1 - k\lambda. \end{cases}$$

Para calcular las coordenadas de los puntos H_i se resuelve el sistema formado por las ecuaciones del haz de rectas r_i y del haz de planos π_i. Sustituyendo los valores x, y, z de las ecuaciones paramétricas del haz de rectas en la ecuación de la radiación del haz de planos, se obtiene:

$$(8 + 2k)[1 + (8 + 2k)\lambda] - (2 - \lambda) - k(-1 - k\lambda) - (16 + 5k) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8 + 2k + (8 + 2k)^2\lambda - 2 + \lambda + k + k^2\lambda - 16 - 5k = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8 + 2k + 64\lambda + 32k\lambda + 4k^2\lambda - 2 + \lambda + k + k^2\lambda - 16 - 5k = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5k^2\lambda + 32k\lambda + 65\lambda - 10 - 2k = 0 \rightarrow \lambda(5k^2 + 32k + 65) = 10 + 2k \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{10 + 2k}{5k^2 + 32k + 65}.$$

Cada pareja plano-recta perpendiculares entre sí se corta en un punto H_i cuyas coordenadas, para todo valor real de k, son:

$$x_i = 1 + (8 + 2k)\frac{10 + 2k}{5k^2 + 32k + 65} =$$

$$= \frac{5k^2 + 32k + 65 + 80 + 36k + 4k^2}{5k^2 + 32k + 65} = \frac{9k^2 + 68k + 145}{5k^2 + 32k + 65};$$

$$y_1 = 2 - \frac{10 + 2k}{5k^2 + 32k + 65} = \frac{10k^2 + 64k + 130 - 10 - 2k}{5k^2 + 32k + 65} = \frac{10k^2 + 62k + 120}{5k^2 + 32k + 65};$$

$$z_1 = -1 - k\frac{10 + 2k}{5k^2 + 32k + 65} = \frac{-5k^2 - 32k - 65 - 10k - 2k^2}{5k^2 + 32k + 65} = -\frac{7k^2 + 42k + 65}{5k^2 + 32k + 65};$$

Los puntos de corte H_i de cada pareja plano-recta perpendiculares entre sí, para todo valor real de k, son:

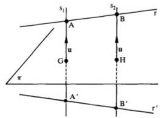
$$H_i\left(\frac{9k^2 + 68k + 145}{5k^2 + 32k + 65}, \frac{10k^2 + 62k + 120}{5k^2 + 32k + 65}, -\frac{7k^2 + 42k + 65}{5k^2 + 32k + 65}\right).$$

Los infinitos puntos Q_i, simétricos del punto P respecto de los distintos centros de simetría H_i (y respecto de los diferentes planos de simetría π_i), para todo valor real de k, son:

$$Q_i = (2x_i - 1, 2y_i - 2, 2z_i + 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow Q_i\left(\frac{13k^2 + 104k + 225}{5k^2 + 32k + 65}, \frac{10k^2 + 60k + 110}{5k^2 + 32k + 65}, -\frac{9k^2 + 52k + 65}{5k^2 + 32k + 65}\right).$$

16. Hallar las ecuaciones de la recta simétrica de la recta $x = y - 1 = z$ respecto al plano $x + z = 0$.



Se consideran dos puntos cualesquiera (A y B) de la recta (r) dada. Los puntos A' y B', simétricos de los puntos A y B respecto del plano (π) dado, determinan la ecuación de la recta (r') simétrica de la recta r respecto del plano π.

Para hallar los puntos A' y B' se procede como en el ejercicio anterior.

Dando dos valores arbitrarios al parámetro λ en la ecuación $x = y - 1 = z = \lambda$, se obtienen las coordenadas de los puntos A y B de la recta r.

Para $\lambda = 0$: $x = y - 1 = z = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow$ punto A(0, 1, 0);

para $\lambda = 1$: $x = y - 1 = z = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - 1 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow$ punto B(1, 2, 1).

Un vector asociado del plano π es $\mathbf{u}(1, 0, 1)$, que es también un vector de dirección de las rectas s_1 y s_2, por ser ambas perpendiculares al plano π. Como, además, la recta s_1 pasa por el punto A(0, 1, 0) y la recta s_2 pasa por el punto B(1, 2, 1), sus respectivas ecuaciones paramétricas son:

$$s_1: \begin{cases} y = 0 + \lambda \\ y = 1 \\ x = 0 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda, \\ y = 1, \\ z + \lambda; \end{cases} \quad s_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2, \\ z = 1 + \lambda. \end{cases}$$

Las coordenadas de los puntos G y H se calculan resolviendo los dos sistemas que forman la ecuación del plano π con la de la recta s_1 (punto G) y con la de la recta s_2 (punto H). Sustituyendo sucesivamente los valores x, y, z de las ecuaciones paramétricas de las rectas s_1 y s_2 en la ecuación del plano π, resulta:

Para el punto G: $\lambda + \lambda = 0 \rightarrow 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$;

para el punto H: $(1 + \lambda) + (1 + \lambda) = 0 \rightarrow 2\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -1$.

La recta s_1 y el plano π se cortan en el punto G cuyas coordenadas son:

$$x = \lambda = 0, \quad y = 1, \quad z = \lambda = 0 \rightarrow G(0, 1, 0).$$

La recta s_2 y el plano π inciden en el punto H que tiene las coordenadas:

$$x = 1 + \lambda = 1 - 1 = 0, \quad y = 2, \quad z = 1 + \lambda = 1 - 1 = 0 \rightarrow H(0, 2, 0).$$

Como los puntos A y G son el mismo punto, la recta s_1 corta al plano π en el punto A; por tanto, el punto A', simétrico del punto A respecto del centro de simetría G (y respecto del plano π) es el propio punto A, A' (0, 1, 0).

El punto B', simétrico del punto B respecto del centro de simetría H (y respecto del plano π), es:

$$B'(2 \cdot 0 - 1, 2 \cdot 2 - 2, 2 \cdot 0 - 1) \rightarrow B'(-1, 2, -1).$$

La recta r', simétrica de la recta r respecto del plano π, está determinada por los puntos A' y B'; así pues, su ecuación continua es:

$$\frac{x - 0}{-1 - 0} = \frac{y - 1}{2 - 1} = \frac{z - 0}{-1 - 0} \rightarrow -x = y - 1 = -z.$$

17. Determinar las ecuaciones del plano simétrico del plano $x - y = 0$ respecto al plano $z = 3$.

Se consideran tres puntos cualesquiera no alineados (A, B y C) del primer plano (π) dado. Los puntos A', B' y C', simétricos de los puntos A, B y C respecto del segundo plano (π_1) dado, determinan la ecuación del plano (π') simétrico del plano π respecto del plano π_1.

Para hallar los puntos A', B' y C' se procede como en los dos ejercicios anteriores.

Dando valores arbitrarios a x y z y hallando los correspondientes valores de y, se obtienen los puntos A, B y C del plano π.

Para $x = 0$ y $z = 0$: $y = z = 0 \rightarrow$ punto A(0, 0, 0);

para $x = 1$ y $z = 0$: $y = x = 1 \rightarrow$ punto B(1, 1, 0);

para $x = 2$ y $z = 1$: $y = x = 2 \rightarrow$ punto C(2, 2, 1).

Un vector asociado del plano π_1 es $\mathbf{u}(0, 0, 1)$, que es también un vector de dirección de las rectas s_1, s_2 y s_3, por ser las tres perpendiculares al plano π_1. Como, además, la recta s_1 pasa por el punto A(0, 0, 0), la recta s_2 pasa por el punto B(1, 1, 0) y la recta s_3 pasa por el punto C(2, 2, 1), sus respectivas ecuaciones paramétricas son:

$$s_1: \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = \lambda; \end{cases} \qquad s_2: \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = \lambda; \end{cases} \qquad s_3: \begin{cases} x = 2, \\ y = 2, \\ z = 1 + \lambda. \end{cases}$$

Las coordenadas de los puntos F, G y H, respectivos puntos medios de los segmentos AA', BB' y CC' (ya que F, G y H son centros de simetría), se calculan resolviendo los tres sistemas que forman la ecuación del plano π_1 con la de la recta s_1 (punto F), con la de la recta s_2 (punto G) y con la de la recta s_3 (punto H). Sustituyendo sucesivamente los valores x, y, z de las ecuaciones paramétricas de las rectas s_1, s_2 y s_3 en la ecuación del plano π_1, resulta:

Para el punto F: $\lambda = 3 \rightarrow F(0, 0, 3)$;

para el punto G: $\lambda = 3 \rightarrow G(1, 1, 3)$;

para el punto H: $1 + \lambda = 3 \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow H(2, 2, 3)$.

El punto A', simétrico del punto A respecto del centro de simetría F (y respecto del plano π_1), es:

$$A'(2 \cdot 0 - 0, 2 \cdot 0 - 0, 2 \cdot 3 - 0) \rightarrow A'(0, 0, 6).$$

El punto B′, simétrico del punto B respecto del centro de simetría G (y respecto del plano π_1), es:

$$B'(2 \cdot 1 - 1,\ 2 \cdot 1 - 1,\ 2 \cdot 3 - 0) \ \rightarrow\ B'(1, 1, 6).$$

El punto C′, simétrico del punto C respecto del centro de simetría H (y respecto del plano π_1), es:

$$C'(2 \cdot 2 - 2,\ 2 \cdot 2 - 2,\ 2 \cdot 3 - 1) \ \rightarrow\ C'(2, 2, 5).$$

El plano π', simétrico del plano π respecto del plano π_1, está determinado por los puntos A′, B′ y C′; por tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-6 \\ 1-0 & 1-0 & 6-6 \\ 2-0 & 2-0 & 5-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z-6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow\ x - y = 0.$$

Es decir, el plano simétrico es el propio plano π.

Nota: Obsérvese que los planos dados π_1 y π son perpendiculares y, por tanto, el simétrico del plano π respecto del plano π_1 es el propio plano π.

34182
9 788426 319180